OMERJ 2014 NÍVEL 4

1) Encontre dois números a e b tais que os algarismos de b são os mesmos algarismos de a em outra ordem e o número $a-b$ possui todos os algarismos iguais a 1.

SOLUÇÃO:

Basta tomar 9087654321 – 8976543210 = 111111111.

COMENTÁRIO: Como a e b possuem a mesma soma dos algarismos, a – b deve ser divisível por 9 e assim devemos ter pelo menos nove uns, o que motiva a construção acima.

2) Um número n de três algarismos é dito eficiente se os 3 últimos algarismos de n^2 são os mesmos algarismos de n e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

SOLUÇÃO:

Para que n seja eficiente, devemos ter
$n^2-n\equiv 0\left(\text{mod}1000\right)\Leftrightarrow n\left(n-1\right)\equiv 0\left(\text{mod}2^3\cdot 5^3\right)$

Com isso, temos 4 casos:

i) $8|n$ e $125|n$:

Neste caso, teríamos que n é divisível por 1000, o que não é possível, pois n possui 3 algarismos.

ii) $8|n$ e $125|n-1$:

Aqui, obtemos n = 376.

iii) $8|n-1$ e $125|n$:

Aqui, obtemos n = 624

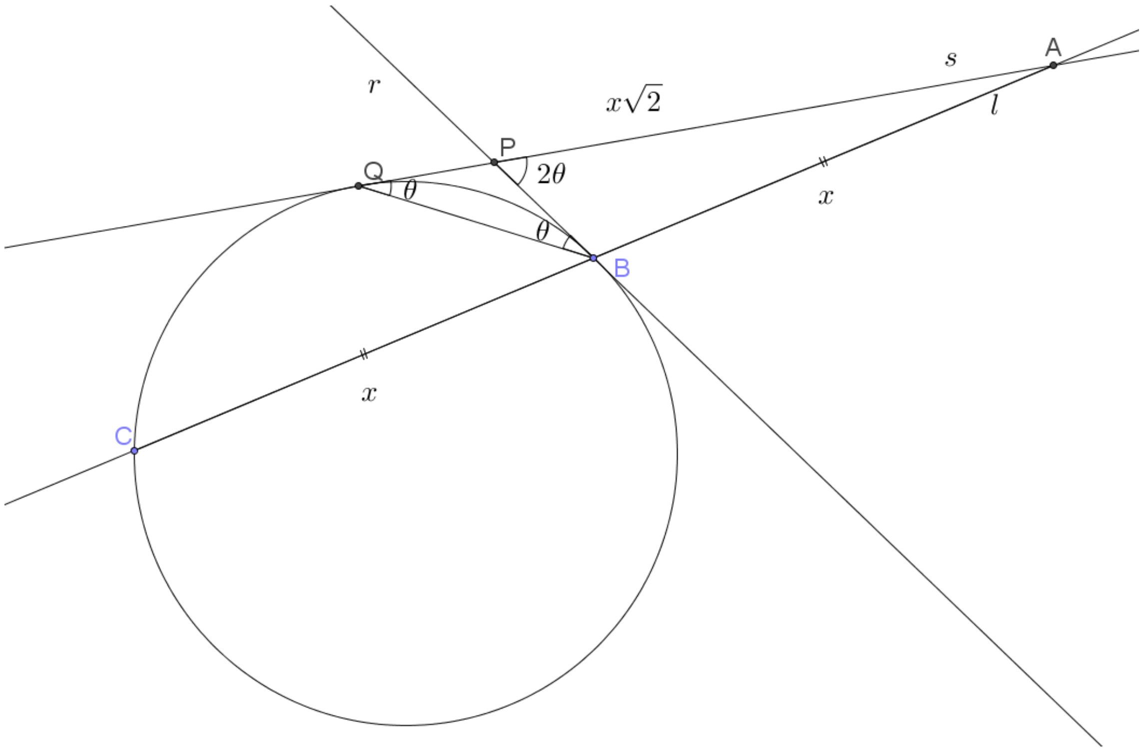
iv) $8|n-1$ e $125|n-1$:

Neste caso, $n-1$ deve ser divisível por 1000, o que não é possível pois n possui 3 algarismos.

Assim, os números eficientes são 376 e 624.

3) Seja Γ uma circunferência, l uma reta secante a Γ em B e C e r a reta tangente a Γ por B. Tome A um ponto em l distinto de C com AB = BC. Se s é uma reta por A tangente a Γ e P é o ponto de interseção de r e s, prove que o ângulo $<APB$ não é obtuso.

SOLUÇÃO:



Seja Q o ponto de tangência da reta s com a circunferência. Sejam $AB = BC = x$. Por potência de ponto, temos que $AB \cdot AC = AQ^2 \Leftrightarrow AQ^2 = 2x^2 \Leftrightarrow AQ = x\sqrt{2}$.

Sejam também $PQB = PBQ = \theta$ (os ângulos são iguais, pois PQ = PB). Desta forma, segue que $APB = 2\theta$ e basta então provar que $\theta \le 45°$. Como $APB = 2\theta$, já sabemos que $\theta \le 90°$.

Para finalizar, usaremos lei dos cossenos no triângulo AQB:

$$x^2 = 2x^2 + BQ^2 - 2\sqrt{2}x\cos\theta \cdot BQ \Leftrightarrow$$
$$BQ^2 - 2\sqrt{2}x\cos\theta \cdot BQ + x^2 = 0$$

O discriminante da equação do segundo grau em BQ é
$8x^2\cos^2\theta - 4x^2 = 4x^2\left(2\cos^2\theta - 1\right)$.

Então $2\cos^2\theta \ge 1 \Rightarrow \cos\theta \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\cos\theta > 0$ e assim segue que $\theta \le 45°$.

4) Para cada n inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas (a,b,c) de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a + b \le 2n \\ b + c \le 2n \\ c + a \le 2n \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

Inicialmente, veja que toda solução nos inteiros não-negativos de $a+b+c \le 2n$.
Introduzindo uma nova variável de folga f, devemos contar $a+b+c+f=2n$, que possui $\binom{2n+3}{3}$ soluções.

Agora, contaremos o número de soluções do sistema de inequações com $a+b+c=2n+k$, onde k é inteiro positivo. Veja que somando as três inequações do sistema, temos $a+b+c \le 3n$, o que nos dá $k \le n$.

Se $a+b+c=2n+k$, substituindo $a+b=2n+k-c$ na primeira inequação, segue que $c \ge k$ e analogamente temos $a,b \ge k$. Fazendo então $a=a'+k$, $b=b'+k$ e $c=c'+k$, devemos resolver $a'+b'+c'=2n-2k$, que possui $\binom{2n-2k+2}{2}$ soluções.

Assim, para a segunda parte do problema, temos o seguinte número de soluções:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-2k+2}{2}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{2}=\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{4n^3+3n^2-n}{6}$$

Desta forma, o total de soluções é

$$\binom{2n+3}{3}+\frac{4n^3+3n^2-n}{6}=\frac{4n^3+9n^2+7n+2}{2}.$$

5) Seja $A_0=(0,0)$, $A_1=(3,0)$ e $A_2=(0,2)$ pontos no plano cartesiano. Definimos recursivamente o ponto A_{n+3} como o baricentro do triângulo $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para $n \ge 0$. Encontre um ponto que está no interior de todos os triângulos $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para todo $n \ge 0$.

SOLUÇÃO:

A equação de recorrência para os pontos A_n é $3A_{n+3}-A_{n+2}-A_{n+1}-A_n=0$.

Afirmamos que a seguinte relação sempre vale: $3A_{n+2}+2A_{n+1}+A_n=(6,6)$.

De fato, pela relação de recorrência, temos que

$$3A_{n+3}-A_{n+2}-A_{n+1}-A_n=0 \Leftrightarrow$$
$$3A_{n+3}+2A_{n+2}+A_{n+1}=3A_{n+2}+2A_{n+1}+A_n$$

Como $3A_2+2A_1+A_0=(6,6)$, segue o que queríamos demonstrar.

Com isso, obtemos que $(1,1)=\frac{1}{2}A_{n+2}+\frac{1}{3}A_{n+1}+\frac{1}{6}A_n$ e isso nos dá que o ponto $(1,1)$ é uma combinação convexa dos pontos A_{n+2},A_{n+1},A_n, pois $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ e

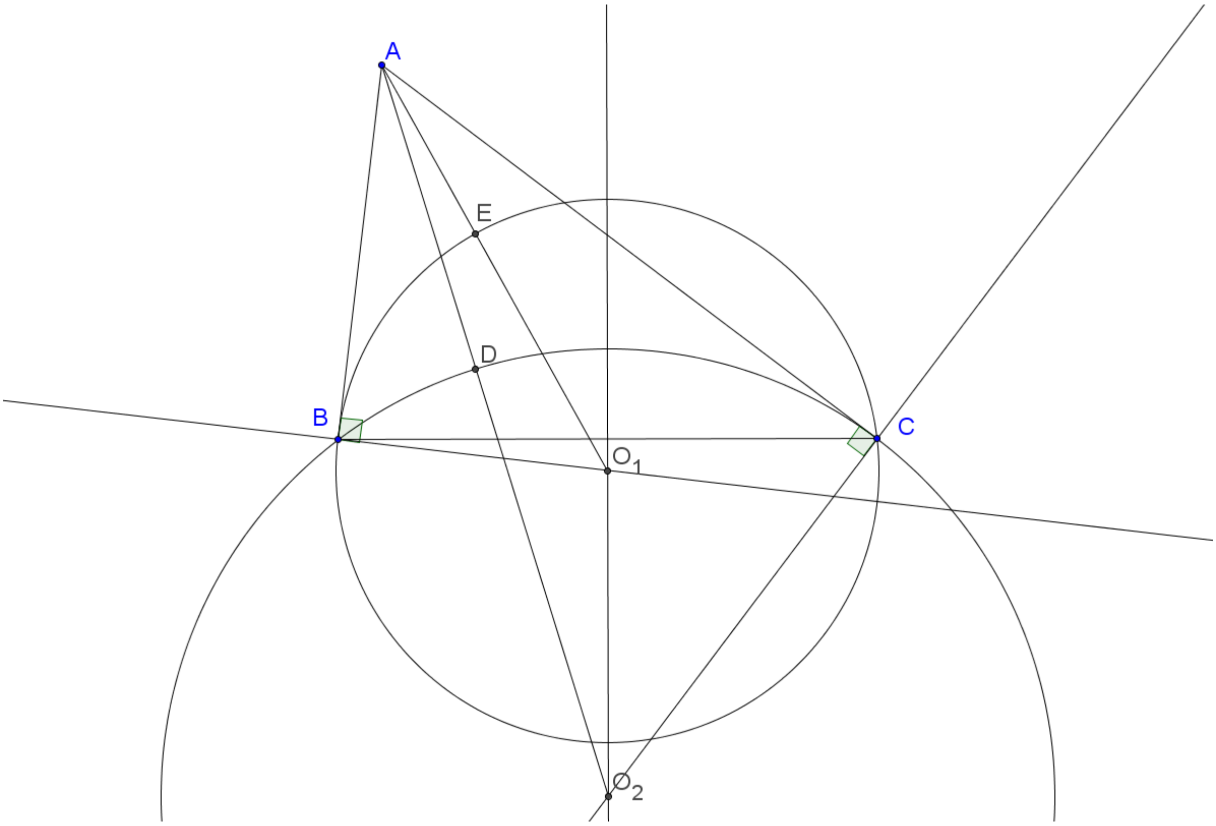
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} > 0$. Desta forma, obtemos que o ponto $(1,1)$ está no interior de todos os triângulos $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ para todo $n \geq 0$.

6) Seja ABC um triângulo acutângulo com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Um ponto P interior ao triângulo é dito B-bom se <PBC = <PCA, e é dito C-bom se <PCB = <PBA. Sejam D o ponto B-bom mais próximo de A e E o ponto C-bom mais próximo de A. Defina F o ponto de interseção entre as retas BD e CE, e G o ponto de interseção, distinto de F, entre os circuncírculos de BEF e CDF.

a) Prove que a reta DE é perpendicular a BC.

b) Prove que A, E, D e G são concíclicos.

SOLUÇÃO:



a)

Como D é o ponto B-bom mais próximo de A, <DBC = <DCA e então D está sobre a circunferência (de centro O_2 e raio R_2) que passa pelos pontos B e C e é tangente a AC em C e sobre a reta AO_1.

Analogamente, E está sobre a circunferência (de centro O_1 e raio R_1) que passa pelos pontos B e C e é tangente a AB em B e sobre a reta AO_2.

Veja que O_1 é a interseção da mediatriz de BC com a reta perpendicular a AB passando por B e que O_2 é a interseção da mediatriz de BC com a reta perpendicular a AC passando por C e então O_1O_2 é perpendicular a BC. Assim, para provar que DE é perpendicular a BC, basta mostrar que DE e O_1O_2 são paralelos. Para isto, devemos mostrar que $\frac{AO_1}{O_1E} = \frac{AO_2}{O_2D} \Leftrightarrow \frac{AO_1}{BO_1} = \frac{AO_2}{CO_2}$, onde usamos que $O_1E = BO_1 = R_1$ e $O_2D = CO_2 = R_2$.

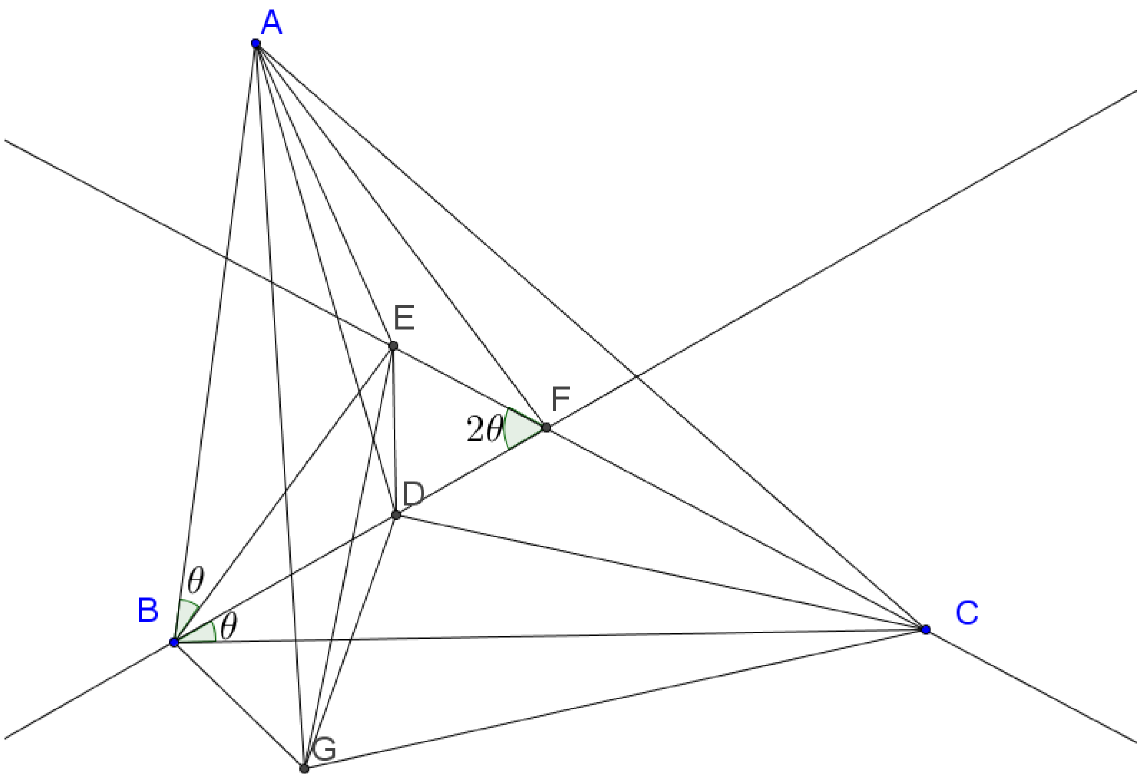
Esta última igualdade é equivalente aos triângulos retângulos ABO_1 e ACO_2 serem semelhantes. Para provar isto, mostraremos que $\frac{AB}{BO_1} = \frac{AC}{CO_2}$. Para finalizar, veja que

$$BC = 2R_1 \operatorname{sen} \frac{< BO_1C}{2} = 2R_1 \operatorname{sen} < B$$

$$BC = 2R_2 \operatorname{sen} \frac{< BO_2C}{2} = 2R_2 \operatorname{sen} < C$$

Assim, $\frac{BO_1}{CO_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\operatorname{sen} < C}{\operatorname{sen} < B} = \frac{AB}{AC}$, como queríamos.

b)



Vimos no item anterior que $< AO_1B =< AO_2C = 2\theta$. Por ângulos inscritos na circunferência, $< DBC =< ECB = \theta$. Como D é C-bom e E é B-bom, temos que $< DCA =< EBA = \theta$. Desta forma, sendo F a interseção de BD e CE, segue que $< FBC =< FCB = \theta$, pois $< FCB =< EBC$. Logo $< EFD =< EFB =< FBC + < FCB = 2\theta$.

Sendo G o ponto de interseção dos circuncírculos de BEF e CDF, temos que BEFG e GDFC são quadriláteros inscritíveis. Assim
$< FGC =< FDC =< DBC + < DCB = \theta + < C - < DCA = \theta + < C - \theta =< C$.

Analogamente, $< FGB =< B$ e então $< BGC =< FGC + < FGB =< B + C = 180 - < A$
Agora, veja que $< DGC =< EFD = 2\theta$ (pois GDFC é inscritível) e $< EGB =< EFB = 2\theta$ (pois BEFG é inscritível).

Com isso, como $< BGC =< BGE + < EGD + < DGC$, segue que
$< EGD = 180 - < A - 4\theta$.

Para finalizar, basta mostrar que $< DAE = 180 - < A - 4\theta$ e isto provará que o quadrilátero AGDE é inscritível, como queremos.

Para isso, voltando na figura do item a), veja que $< O_2DC = 90 - \theta$ e então
$< ADC = 90 + \theta$. Como $< DCA = \theta$, segue que $< DAC = 90 - 2\theta$. Analogamente,
$< BAE = 90 - 2\theta$.

Por fim:

$$< A =< BAE + < DAC - < DAE \Leftrightarrow$$
$$< A = 180 - 4\theta - < DAE \Leftrightarrow$$
$$< DAE = 180 - 4\theta - < A$$

Isto conclui a prova.