OMERJ 2014 NÍVEL 3

1) Seis pessoas tentam adivinhar o número de pedras em uma caixa. Arnaldo diz 57 pedras, Bernaldo diz 64, Cernaldo diz 67, Dernaldo diz 70, Ernaldo diz 54 e Fernaldo 47. Todos erraram, alguns para mais e outros para menos. Eles erraram por 1, 4, 6, 9, 11 e 12, em alguma ordem, mas não se sabe quem cometeu cada erro. Quantas pedras havia na caixa.

SOLUÇÃO:

O erro de 12 pedras deve estar associado necessariamente a Fernaldo, que disse o menor número dentre os 6, ou a Dernaldo, que disse o maior número dentre os 6.

Dividimos então em dois casos e vejamos qual deles é possível:

CASO 1: O erro de 12 pedras está associado a Fernaldo

Assim, o número de pedras na caixa seria 47 + 12 = 59. Neste caso, o erro de Arnaldo seria de 2 pedras, que não consta na lista de erros. Descartamos então esta possibilidade.

CASO 2: O erro de 12 pedras está associado a Dernaldo

Assim, o número de pedras na caixa seria 70 – 12 = 58. Neste caso, os erros seriam:

Arnaldo – 1

Bernaldo – 6

Cernaldo – 9

Dernaldo – 12

Ernaldo – 4

Fernaldo – 11

Esta configuração é compatível com os dados do enunciado e assim havia 58 pedras na caixa.

2) Sabendo que cada uma das letras A, B, C, D, E, F, G e H representa um algarismo diferente entre 0 e 9 e que os números ABACDE, CAFDG, CHHBAED são lados de um triângulo. Descubra qual algarismo cada letra representa.

SOLUÇÃO:

Consideraremos dois casos no problema:

CASO 1: $C \neq 0$

Neste caso, se $C \geq 2$, $CHHBAED > 2 \cdot 10^6$, enquanto $ABACDE < 10^6$ e $CAFDG < 10^6$. Com isso, segue que $CHHBAED > ABACDE + CAFDG$, o que contraria a desigualdade triangular.

Concluímos então que $C = 1$. Agora, se $A \leq 8$, $ABACDE + CAFDG < 900000 + 100000 = 10^6 < CHHBAED$, o que também contraria a desigualdade triangular. Concluímos então que $A = 9$.

Temos agora que $9B91DE + 19FDG > 1HHB9ED$. Veja agora que $9B91DE < 990000$ e $19FDG < 20000$. Logo $1HHB9ED < 1010000$ e assim $H = 0$.

Desta forma,

$$9B91DE + 19FDG > 100B9ED \Leftrightarrow$$
$$9 \cdot 10^5 + B91DE + 19000 + FDG > 10^6 + B9ED \Leftrightarrow$$
$$B91DE + FDG > 81000 + B9ED$$

Como $FDG < 1000$, segue que $B91DE > 80000 \Rightarrow B = 8$, uma vez que o algarismo 9 já foi utilizado.

Reescrevendo mais uma vez a desigualdade triangular, temos:

$$891DE + FDG > 81000 + 89ED \Leftrightarrow$$
$$89100 + DE + FDG > 81000 + 8900 + ED \Leftrightarrow$$
$$DE + FDG > 800 + ED$$

Como $DE < 100$, segue que $FDG > 700$ e uma vez que os algarismos 8 e 9 já foram utilizados, $F = 7$.

Reescrevendo a desigualdade triangular:

$$DE + 7DG > 800 + ED \Leftrightarrow$$
$$DE + 700 + DG > 800 + ED \Leftrightarrow$$
$$DE + DG > 100 + ED$$

Como os algarismos 0 e 1 já foram utilizados, $ED > 20$ e assim $DE + DG > 120$, o que mostra que $D \geq 6$. Como 7, 8, 9 já foram utilizados, temos que $D = 6$ e assim:

$$60 + E + 60 + G > 100 + E6 \Leftrightarrow$$
$$14 + G > 9E$$

Como $G \leq 5$, $9E \leq 19 \Rightarrow E = 2$ e então só nos resta G = 5.

Logo, no primeiro caso, a única solução é:

A = 9, B = 8, C = 1, D = 6, E = 2, F = 7, G = 5, H = 0.

CASO 2: $C = 0$

Se H > A, temos que

$$HH0000 < HHBAED < ABA0DE + AFDG < H00000 + AFDG \Rightarrow$$
$$HH0000 < H0AFDG$$,

o que é absurdo, pois $H \geq 1$.

Logo $H < A$ e então $ABA0DE < HHBAED + AFDG$. Como $H \leq A - 1$, temos que $HHBAED < (A-1)A0000$ e então obtemos que $ABA0DE < (A-1)AAFGD$, o que é contradição. Desta forma, temos apenas a solução do primeiro caso.

3) Um número n de três algarismos é dito eficiente se os 3 últimos algarismos de n^2 são os mesmos algarismos de n e na mesma ordem. Encontre todos os números eficientes.

SOLUÇÃO:

Para que n seja eficiente, devemos ter

$$n^2 - n \equiv 0 \pmod{1000} \Leftrightarrow n(n-1) \equiv 0 \left(\bmod\, 2^3 \cdot 5^3\right)$$

Com isso, temos 4 casos:

i) $8 | n$ e $125 | n$:

Neste caso, teríamos que n é divisível por 1000, o que não é possível, pois n possui 3 algarismos.

ii) $8 | n$ e $125 | n-1$:

Aqui, obtemos n = 376.

iii) $8 | n-1$ e $125 | n$:

Aqui, obtemos n = 624

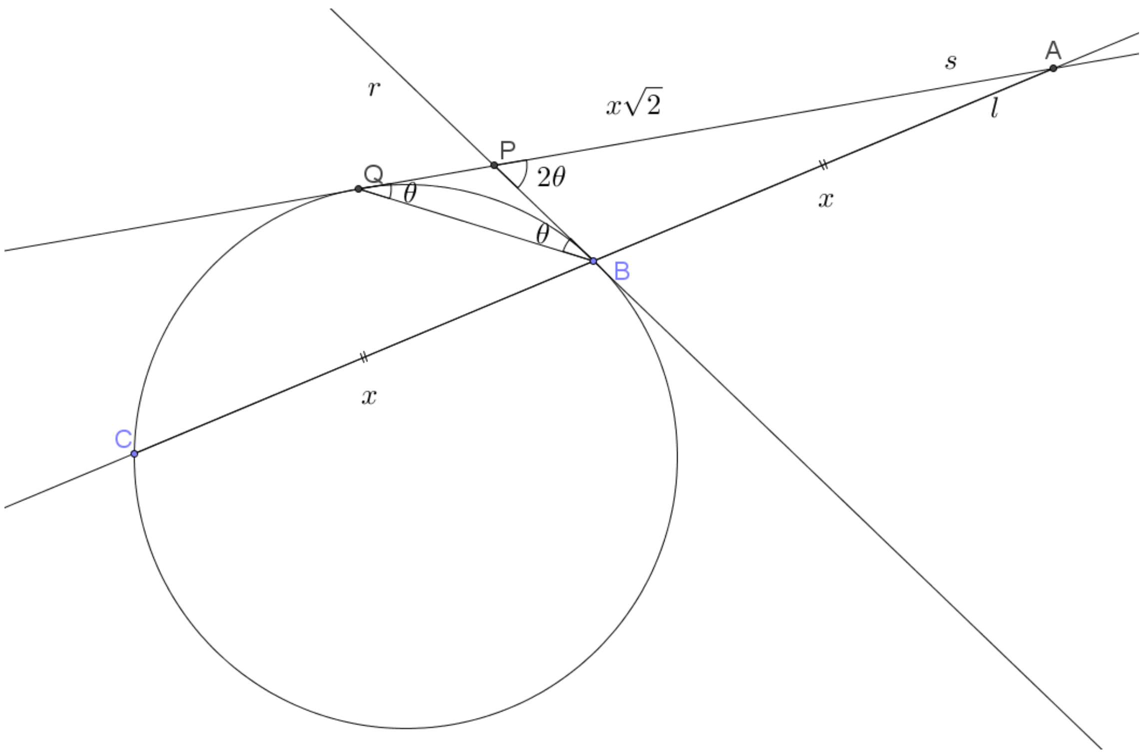
iv) $8 | n-1$ e $125 | n-1$:

Neste caso, $n-1$ deve ser divisível por 1000, o que não é possível pois n possui 3 algarismos.

Assim, os números eficientes são 376 e 624.

4) Seja Γ uma circunferência, l uma reta secante a Γ em B e C e r a reta tangente a Γ por B. Tome A um ponto em l distinto de C com AB = BC. Se s é uma reta por A tangente a Γ e P é o ponto de interseção de r e s, prove que o ângulo $< APB$ não é obtuso.

SOLUÇÃO:



Seja Q o ponto de tangência da reta s com a circunferência. Sejam $AB = BC = x$. Por potência de ponto, temos que $AB \cdot AC = AQ^2 \Leftrightarrow AQ^2 = 2x^2 \Leftrightarrow AQ = x\sqrt{2}$.

Sejam também $PQB = PBQ = \theta$ (os ângulos são iguais, pois PQ = PB). Desta forma, segue que $APB = 2\theta$ e basta então provar que $\theta \le 45°$. Como $APB = 2\theta$, já sabemos que $\theta \le 90°$.

Para finalizar, usaremos lei dos cossenos no triângulo AQB:

$$x^2 = 2x^2 + BQ^2 - 2\sqrt{2}x\cos\theta \cdot BQ \Leftrightarrow$$
$$BQ^2 - 2\sqrt{2}x\cos\theta \cdot BQ + x^2 = 0$$

O discriminante da equação do segundo grau em BQ é
$8x^2\cos^2\theta - 4x^2 = 4x^2\left(2\cos^2\theta - 1\right)$.

Então $2\cos^2\theta \ge 1 \Rightarrow \cos\theta \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, pois $\cos\theta > 0$ e assim segue que $\theta \le 45°$.

5) Para cada n inteiro não negativo, calcule a quantidade de triplas (a,b,c) de inteiros não negativos que satisfazem o sistema de inequações abaixo:

$$\begin{cases} a + b \le 2n \\ b + c \le 2n \\ c + a \le 2n \end{cases}$$

SOLUÇÃO:

Inicialmente, veja que toda solução nos inteiros não-negativos de $a+b+c \le 2n$. Introduzindo uma nova variável de folga f, devemos contar $a+b+c+f=2n$, que possui $\binom{2n+3}{3}$ soluções.

Agora, contaremos o número de soluções do sistema de inequações com $a+b+c=2n+k$, onde k é inteiro positivo. Veja que somando as três inequações do sistema, temos $a+b+c \le 3n$, o que nos dá $k \le n$.

Se $a+b+c=2n+k$, substituindo $a+b=2n+k-c$ na primeira inequação, segue que $c \ge k$ e analogamente temos $a,b \ge k$. Fazendo então $a=a'+k$, $b=b'+k$ e $c=c'+k$, devemos resolver $a'+b'+c'=2n-2k$, que possui $\binom{2n-2k+2}{2}$ soluções.

Assim, para a segunda parte do problema, temos o seguinte número de soluções:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{2n-2k+2}{2}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2k}{2}=\sum_{k=1}^{n}k(2k-1)=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{4n^3+3n^2-n}{6}$$

Desta forma, o total de soluções é

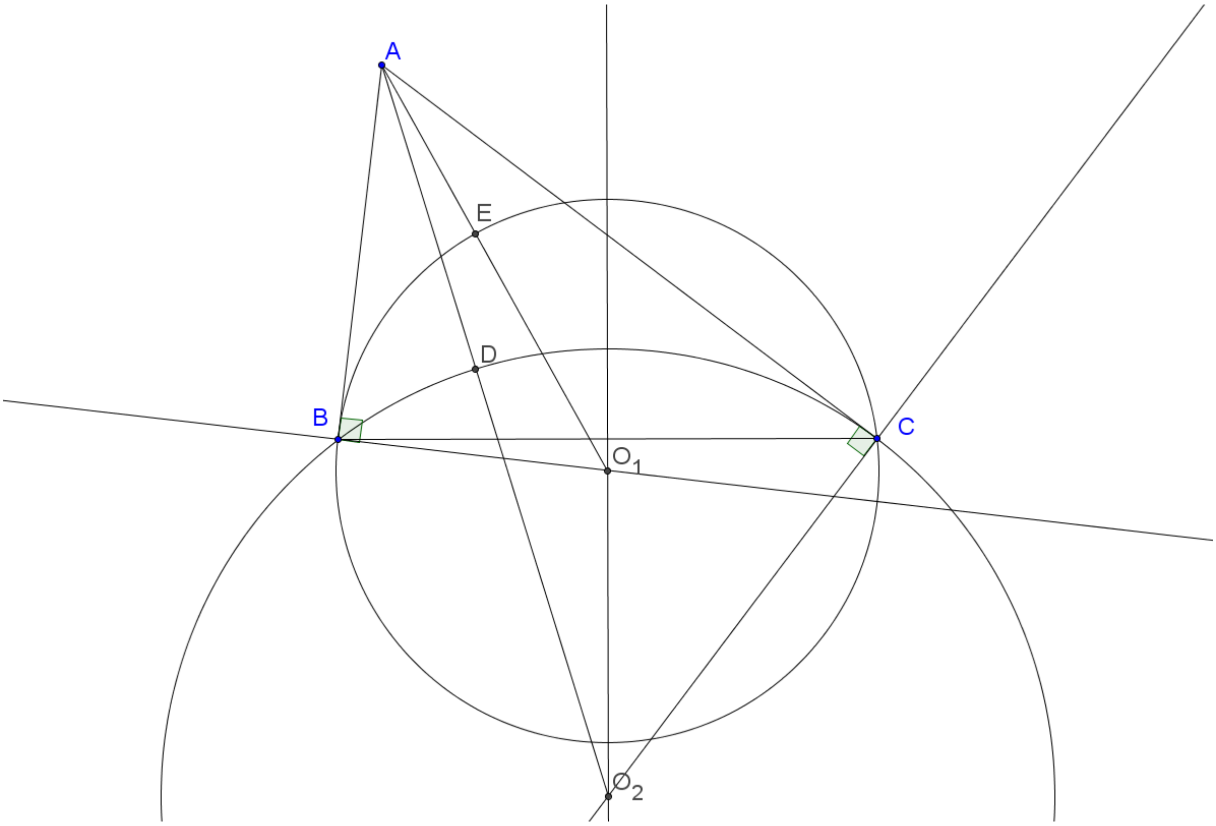
$$\binom{2n+3}{3}+\frac{4n^3+3n^2-n}{6}=\frac{4n^3+9n^2+7n+2}{2}.$$

6) Seja ABC um triângulo acutângulo com $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Um ponto P interior ao triângulo é dito B-bom se <PBC = <PCA, e é dito C-bom se <PCB = <PBA. Sejam D o ponto B-bom mais próximo de A e E o ponto C-bom mais próximo de A. Defina F o ponto de interseção entre as retas BD e CE, e G o ponto de interseção, distinto de F, entre os circuncírculos de BEF e CDF.

a) Prove que a reta DE é perpendicular a BC.

b) Prove que A, E, D e G são concíclicos.

SOLUÇÃO:



a)

Como D é o ponto B-bom mais próximo de A, <DBC = <DCA e então D está sobre a circunferência (de centro O_2 e raio R_2) que passa pelos pontos B e C e é tangente a AC em C e sobre a reta AO_1.

Analogamente, E está sobre a circunferência (de centro O_1 e raio R_1) que passa pelos pontos B e C e é tangente a AB em B e sobre a reta AO_2.

Veja que O_1 é a interseção da mediatriz de BC com a reta perpendicular a AB passando por B e que O_2 é a interseção da mediatriz de BC com a reta perpendicular a AC passando por C e então O_1O_2 é perpendicular a BC. Assim, para provar que DE é perpendicular a BC, basta mostrar que DE e O_1O_2 são paralelos. Para isto, devemos mostrar que

$\frac{AO_1}{O_1E} = \frac{AO_2}{O_2D} \Leftrightarrow \frac{AO_1}{BO_1} = \frac{AO_2}{CO_2}$, onde usamos que $O_1E = BO_1 = R_1$ e $O_2D = CO_2 = R_2$.

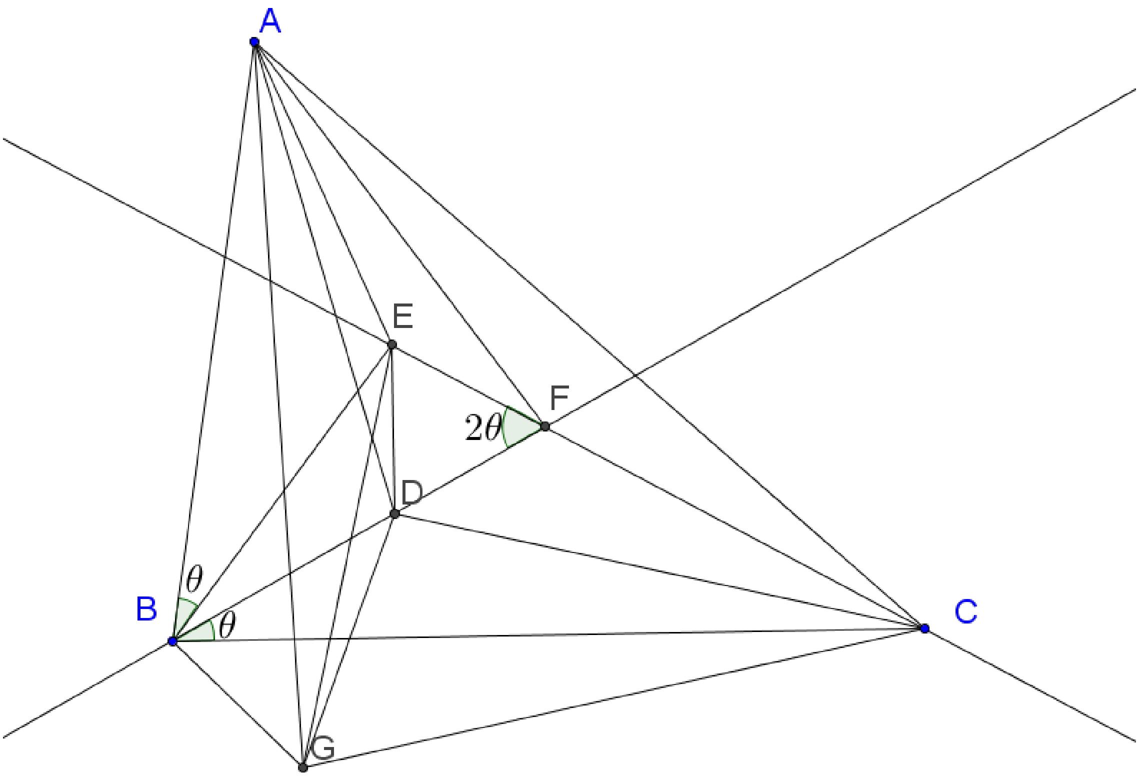
Esta última igualdade é equivalente aos triângulos retângulos ABO_1 e ACO_2 serem semelhantes. Para provar isto, mostraremos que $\frac{AB}{BO_1} = \frac{AC}{CO_2}$. Para finalizar, veja que

$$BC = 2R_1 \operatorname{sen} \frac{< BO_1C}{2} = 2R_1 \operatorname{sen} < B$$

$$BC = 2R_2 \operatorname{sen} \frac{< BO_2C}{2} = 2R_2 \operatorname{sen} < C$$

Assim, $\dfrac{BO_1}{CO_2}=\dfrac{R_1}{R_2}=\dfrac{\text{sen}<C}{\text{sen}<B}=\dfrac{AB}{AC}$, como queríamos.

b)



Vimos no item anterior que $<AO_1B=<AO_2C=2\theta$. Por ângulos inscritos na circunferência, $<DBC=<ECB=\theta$. Como D é C-bom e E é B-bom, temos que $<DCA=<EBA=\theta$. Desta forma, sendo F a interseção de BD e CE, segue que $<FBC=<FCB=\theta$, pois $<FCB=<EBC$. Logo $<EFD=<EFB=<FBC+<FCB=2\theta$.

Sendo G o ponto de interseção dos circuncírculos de BEF e CDF, temos que BEFG e GDFC são quadriláteros inscritíveis. Assim
$<FGC=<FDC=<DBC+<DCB=\theta+<C-<DCA=\theta+<C-\theta=<C$.

Analogamente, $<FGB=<B$ e então $<BGC=<FGC+<FGB=<B+C=180-<A$
Agora, veja que $<DGC=<EFD=2\theta$ (pois GDFC é inscritível) e $<EGB=<EFB=2\theta$ (pois BEFG é inscritível).

Com isso, como $<BGC=<BGE+<EGD+<DGC$, segue que $<EGD=180-<A-4\theta$
.

Para finalizar, basta mostrar que $<DAE=180-<A-4\theta$ e isto provará que o quadrilátero AGDE é inscritível, como queremos.

Para isso, voltando na figura do item a), veja que $<O_2DC=90-\theta$ e então $<ADC=90+\theta$. Como $<DCA=\theta$, segue que $<DAC=90-2\theta$. Analogamente, $<BAE=90-2\theta$.

Por fim:

$$< A = < BAE + < DAC - < DAE \Leftrightarrow$$
$$< A = 180 - 4\theta - < DAE \Leftrightarrow$$
$$< DAE = 180 - 4\theta - < A$$

Isto conclui a prova.