Gabarito OMERJ Nível 3

1) Alguns exemplos são: (3, 5, 23) , (3,7,13), (3,11,17).

<u>Comentário</u>: É possível provar que um dos primos é 3 e que 2 não pode ser um dos primos.

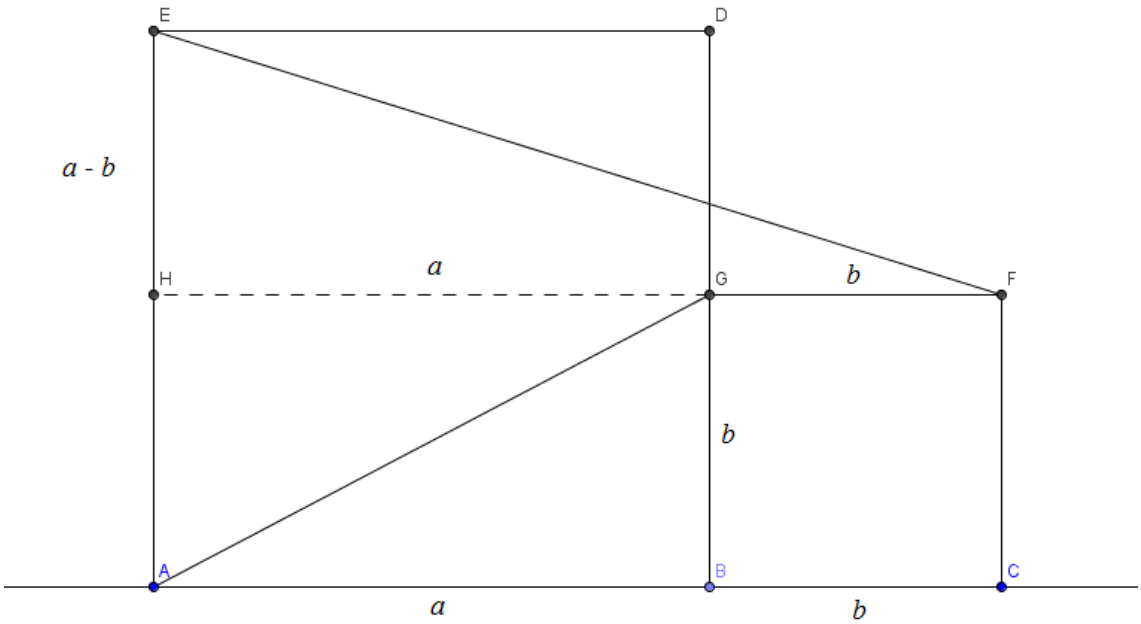
Com efeito, se um dos primos for 2, os outros dois serão ímpares e assim a soma será par.

Além disso, veja que o quadrado de um número não múltiplo de 3 deixa sempre resto 1 na divisão por 3. Então, se 3 não aparece entre os primos, a soma de seus quadrados seria múltipla de 3, contradição.

2) Para a poção de gigantismo, $x \to 8x$ e para a poção de nanicolina, $x \to \frac{x}{4}$. Assim, basta que Elvira tome duas poções de gigantismo e três de nanicolina, em qualquer ordem, pois $\frac{8^2}{4^3} = 1$.

3)

a)



Seja H o pé da perpendicular desde G até o lado AE. Além disso, sejam $a > b$ os lados dos quadrados. Veja na figura acima que pelo teorema de Pitágoras, $EF = \sqrt{(a-b)^2 + (a+b)^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$, e que $AG = \sqrt{a^2+b^2}$. Logo, a razão pedida é $\frac{EF}{AG} = \sqrt{2}$.

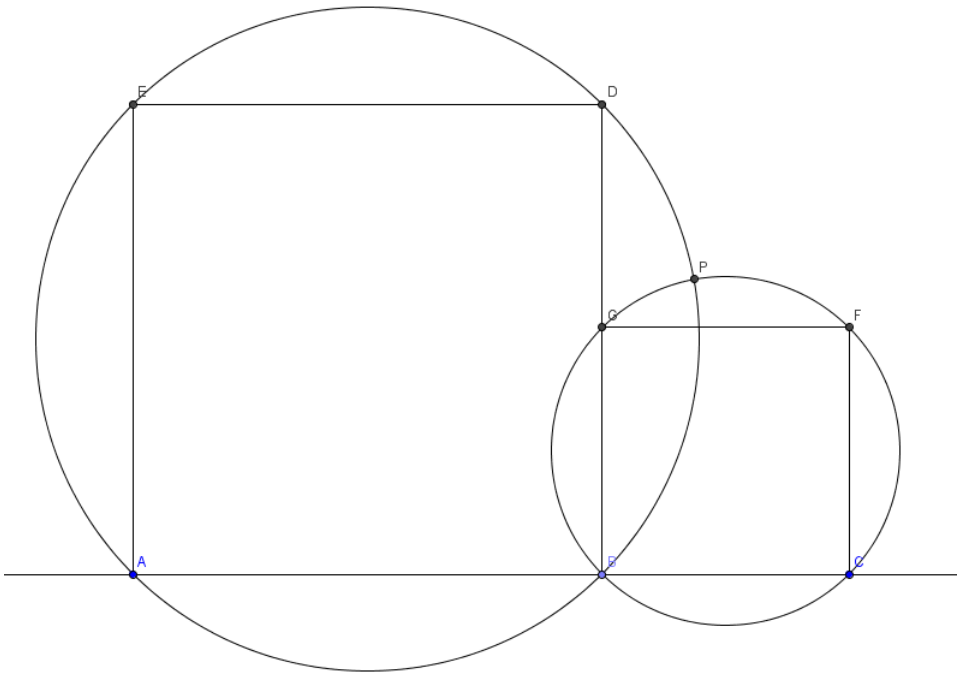
b) Veja que $\tan\left(BAG\right)=\dfrac{b}{a}$ e que $\tan\left(GFE\right)=\dfrac{a-b}{a+b}$. Então,

$\tan\left(BAG+GFE\right)=\dfrac{\dfrac{b}{a}+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{b\left(a-b\right)}{a\left(a+b\right)}}=\dfrac{b^2+a^2}{a^2+b^2}=1$. Como os ângulos são agudos, segue que

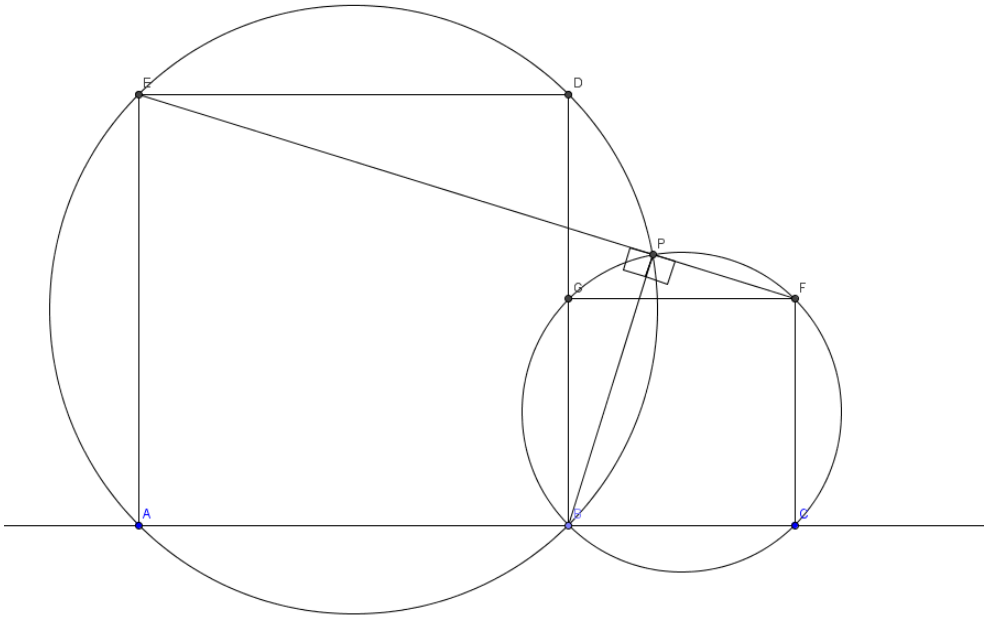
$BAG+GFE=45°$.

Obs: usamos a fórmula $\tan\left(a+b\right)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

c) <u>Solução 1</u>:

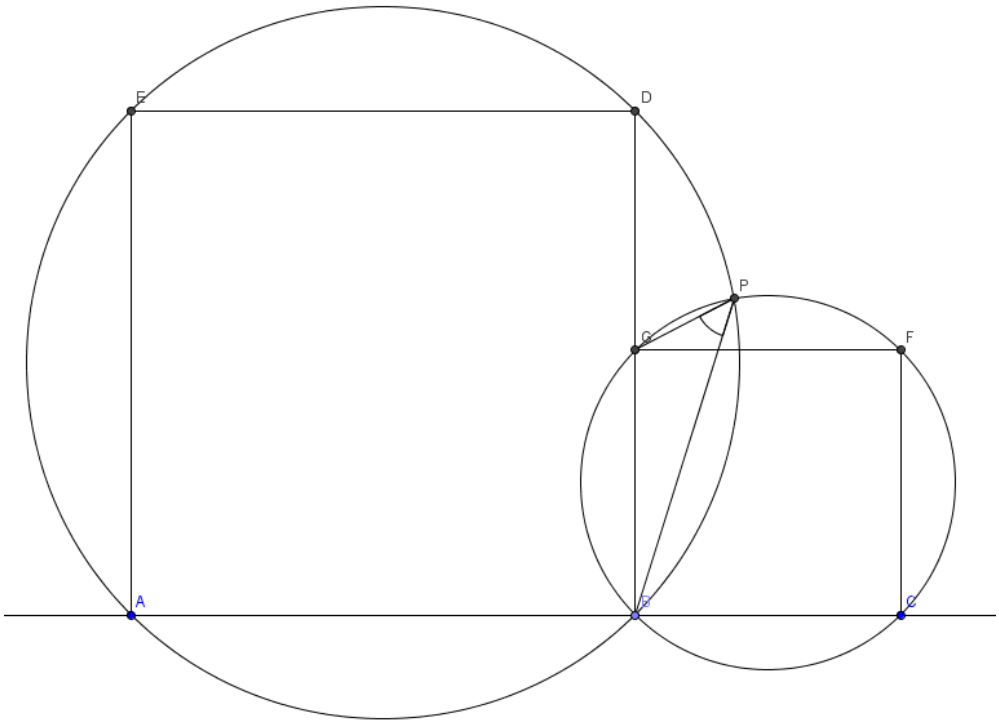


Seja *P* a interseção entre as circunferências circunscritas aos quadrados *ABDE* e *BCFG*. Provaremos que o ponto *P* é o ponto de concorrência das retas *AG*, *EF* e *DC*.



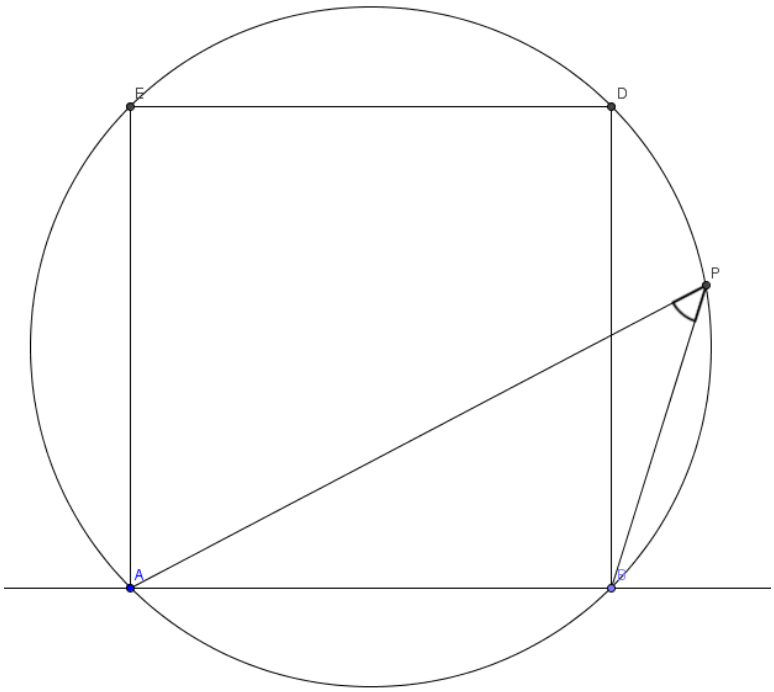
Como *BE* e *BF* são diâmetros, segue que $EPB = 90°$ e que $BPF = 90°$. Assim, o ponto *P* está na reta *EF*. Analogamente, *P* está na reta *DC*.

Para finalizar, basta mostrarmos que *P* também está na reta *AG*. Para isso, veja a figura a seguir:



Temos que $GPB = \frac{BG}{2} = 45°$.

Agora, considere a seguinte figura:



Veja que $APB = \frac{AB}{2} = 45°$.

Assim, segue que A, G, P são colineares, como queríamos.

<u>Solução 2</u>:

Seja P a interseção de AG com EF. Utilizaremos o teorema de Menelaus no triângulo ABG. Para isso, precisamos das razões $\frac{DG}{DB}, \frac{CB}{CA}, \frac{PA}{PG}$.

(i) $\frac{CB}{CA} = \frac{b}{a+b}$

(ii) $\frac{DG}{DB} = \frac{a-b}{a}$

(iii) Pelo item b, temos que $F\hat{P}G = 135°$. Usando a lei dos senos no triângulo PGF, temos $\frac{PG}{\text{sen}\left(P\hat{F}G\right)} = \frac{b}{\sqrt{2}/2}$. Usando a figura do item a, temos $\text{sen}\left(P\hat{F}G\right) = \frac{a-b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$. Logo, $PG = \frac{(a-b)b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Daí, $PA = PG + AG = \frac{(a-b)b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sqrt{a^2+b^2}$, ou seja, $PA = \frac{(a+b)a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Portanto, $\frac{PA}{PG} = \frac{a(a+b)}{b(a-b)}$.

Com isso, temos que $\frac{DG}{DB}\cdot\frac{CB}{CA}\cdot\frac{PA}{PG}=1$ e pela recíproca do teorema de Menelaus aplicado ao triângulo AGB, segue que D, P e C são colineares.

4)

a) Os tabuleiros 2 x 2 são: $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$. Logo, $a_2=4$.

b) Para os tabuleiros 3 x 3, dividiremos em casos de acordo com as quantidades de 1's por linha:

Caso 1: Não há 1's:

$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ - 1 tabuleiro

Caso 2: Um 1:

Basta permutar as colunas de $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, o que pode ser feito de $3!=6$ maneiras.

Caso 3: Dois 1's:

Fazendo uma troca $0\leftrightarrow 1$, caímos no caso 2, em um total de 6 tabuleiros.

Caso 4: Três 1's:

Fazendo uma troca $0\leftrightarrow 1$, caímos no caso 1, em um total de 1 tabuleiro.

Logo, $a_3=1+6+6+1=14$.

c) Faremos uma contagem semelhante aos tabuleiros 3x3:

Caso 1: Não há 1's:

1 tabuleiro

Caso 2: Um 1:

$4!=24$ tabuleiros (análogo ao caso 2 do tabuleiro 3x3)

Caso 3: Dois 1's:

Há $\binom{4}{2}=6$ de se colocar os 1's na primeira linha. (*)

Sem perda de generalidade, suporemos que a primeira linha é $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Na primeira coluna, deve haver mais um 1, o que pode ser feito de 3 maneiras (**). Sem perde de generalidade, suporemos que o tabuleiro é da forma $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$.

O primeiro tipo está claramente determinado e deve ser $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$. Os outros dois aparecem em iguais quantidades e, então, podemos considerar apenas o primeiro deles.

Na segunda coluna, deve haver mais um 1, o que pode ser feito de 2 maneiras, o que nos dá os tabuleiros:

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Portanto, há 5 tabuleiros após (**). Assim, no caso 3, há $\binom{4}{2}\cdot 3\cdot 5 = 90$ tabuleiros.

O caso 4 é a mesma quantidade do caso 2 e o caso 5 é a mesma quantidade do caso 1.

Logo, $a_4 = 1+24+90+24+1 = 140$.

d) É fácil ver que para 0, 1, 4, 5 1's por linha, assim como nos casos anterios, as quantidades de tabuleiros são, respectivamente, $1, 5!, 5!, 1$. Além disso, os casos com 2 e 3 1's por linha, as quantidades são as mesmas. Faremos então o caso com 2 1's por linha:

Assim como anteriormente, temos $\binom{5}{2}$ opções para a 1ª linha (*). Sem perdas, podemos considerar a linha $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Deve haver outro 1 na 1ª coluna e seu lugar pode ser escolhido de 4 maneiras (**). Então, podemos começar com o tabuleiro

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$. Se o elemento da 2ª linha e 2ª coluna for 1, temos o tabuleiro

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$. Agora, para finalizar, precisamos preencher um tabuleiro 3x3 colocando dois 1's por linha e coluna. Isso já foi feito no cálculo do a_3 e pode ser feito de 3! = 6 maneiras.

Se o elemento da 2ª linha e 2ª coluna for 0, o 1 da 2ª linha pode ser colocado em 3 posições. Sem perdas, coloquemos o 1 na coluna 3: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$. Precisamos ter um 1 na 2ª coluna, que pode ser colocado em 3 posições. Sem perdas, consideremos o tabuleiro $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$. Aqui, temos 2 situações.

(i) o elemento da 3ª linha e 3ª coluna é 1: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (só há uma opção)

(ii) o elemento da 3ª linha e 3ª coluna é 0. Daí, há duas opções para o outro 1 da 3ª linha e 2 opções para o outro 1 da 3ª coluna. Sem perdas, colocando esses 1's na 4ª coluna e na 4ª linha respectivamente, temos o tabuleiro $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Juntando tudo, neste caso, temos $\binom{5}{2}\cdot 4\cdot\left(3!+3\cdot 3\cdot\left(1+2\cdot 2\right)\right)=2040$ tabuleiros.

Então, $a_5=1+120+2040+2040+120+1$, ou seja, $a_5=4322$.

5) Solução 1:

Veja que $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{\left(1+x\right)^2-\left(1-x\right)^2}{\left(1+x\right)^2+\left(1-x\right)^2}$. Daí,

$f\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{\left(1+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2-\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}{\left(1+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2+\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}=\dfrac{\left(1+x\right)^4-\left(1-x\right)^4}{\left(1+x\right)^4+\left(1-x\right)^4}$. Assim, por indução, segue que $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2013\text{ vezes}}\left(x\right)=\dfrac{\left(1+x\right)^{2^{2013}}-\left(1-x\right)^{2^{2013}}}{\left(1+x\right)^{2^{2013}}+\left(1+x\right)^{2^{2013}}}$. Então, para $x=2$, o resultado será $\dfrac{3^{2^{2013}}-1}{3^{2^{2013}}+1}$.

Solução 2:

Veja que após apertar a calculadora 1 vez, o número será $\dfrac{4}{5}$, após apertar a calculadora 2 vezes, o número será $\dfrac{40}{41}$.

Provaremos então que após apertar a tecla para um número da forma $\dfrac{n}{n+1}$, o número resultante também será desta forma. De fato, o número será $\dfrac{\dfrac{2n}{n+1}}{1+\dfrac{n^2}{\left(n+1\right)^2}}=\dfrac{2n\left(n+1\right)}{2n\left(n+1\right)+1}$.

Assim, sendo $\dfrac{x_n}{x_n+1}$ o número que aparece na calculadora após apertarmos *n* vezes o botão, teremos que $x_{n+1}=2x_n\left(x_n+1\right)\Rightarrow 2x_{n+1}+1=\left(2x_n+1\right)^2$. Sendo $x_1=4$, teremos que $2x_n+1=9^{2^{2^{n-1}}}\Rightarrow x_n=\dfrac{3^{2^n}-1}{2}$. Logo, o número obtido por Luca será $\dfrac{3^{2^{2013}}-1}{3^{2^{2013}}+1}$.

6) Para fazer com que $m+1$ e $n+1$ sejam parceiros, escolheremos $\left(m+1\right)=\left(n+1\right)^2$, o que nos dá $m=n\left(n+2\right)$. Para fazer com que *m* e *n* sejam parceiros, basta tomar

$n = 2^k - 2$. Veja que isso faz com que $m = n \cdot 2^k$ e que como n é par, a potência 2^k não introduz novos fatores primos e então m e n serão parceiros.