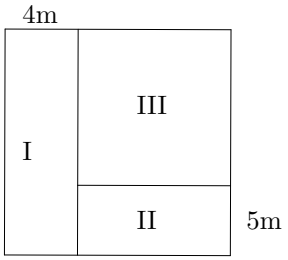
OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 2 (8° e 9° anos do ensino fundamental)

Parte A

1. Um jovem fazendeiro dividiu seu terreno em forma de um quadrado em três partes:



Qual a área do terreno III, conhecendo-se uma das dimensões do terreno I e uma do terreno II e sabendo-se que a área do terreno I é $60m^2$?

2. Um quadrado mágico de ordem n é um certo arranjo dos números inteiros

$$1; 2; 3; \cdots n-1; n; n+1; \cdots ; n^2-2; n^2-1; n^2.$$

dispostos numa tabela quadrada, em que todas as linhas e colunas tem a mesma soma. Essa soma é conhecida como constante mágica. São quadrados mágicos, de ordem 3, 4 e 5 respectivamente, as tabelas

2	7	6
9	5	1
4	3	8

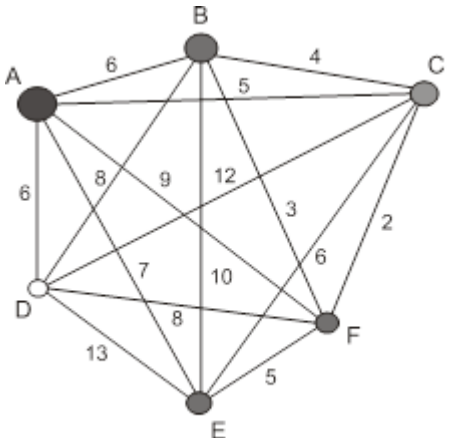
7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

1	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

cujas constantes mágicas são, respectivamente, 15, 34 e 65. Calcule a constante mágica de um quadrado mágico de ordem 6.

3. O professor Frederico é um grande torcedor do Sofredor Football Club e viu seu time vencer o campeonato nacional por quatro vezes. Seu amigo 37 anos mais jovem, o professor Barbosa, é bem mais contente torcendo pelo Vitorioso Futebol e Regatas, embora só tenha visto a conquista de um dos dois campeonatos nacionais vencidos pelo seu time. Como o campeonato nacional sempre termina depois que os dois já fizeram aniversário, Frederico viu seu time ser campeão pela primeira vez quando tinha 23 anos. Por outro lado, Barbosa viu o Vitorioso ser campeão aos 11 anos de idade (por isso ele é mais contente). O Sofredor venceu pela segunda vez no ano em que Barbosa nasceu e pela quarta vez 42 anos depois do primeiro tétulo. Entre os dois primeiros títulos do Sofredor, o número de anos decorridos foi sete vezes maior que o intervalo de anos entre os dois últimos títulos. Em 2013 completa 21 anos que Barbosa viu o título do Vitorioso. Em quais anos Frederico viu o Sofredor Football Club vencer o campeonato nacional?

4. Rafaelito Galvón, entregador de pizzas da Mainha Mia, única pizzaria da pequena cidade de Tribobó do Norte, representada pelo ponto A do mapa, fará cinco entregas representadas pelos demais pontos e em seguida voltará para a pizzaria no ponto A. Os valores entre os pontos representam o tempo de viagem que o motoboy gasta para fazer cada um dos percursos, devido ao trânsito, estado de conservação da rua e outros fatores. Tais tempos não estão necessariamente ligados à distância e, como ele precisa fazer o percurso no menor tempo possível, faz o planejamento da viagem antes de sair da pizzaria. Percebendo que o trajeto ABCDEFA, não diferencia em nada de seu simétrico AFEDCBA, o motoboy leva 40 segundos para analisar cada trajeto e descartar seu simétrico. Qual o tempo mínimo, em minutos, para o motoboy analisar todos os possíveis trajetos?

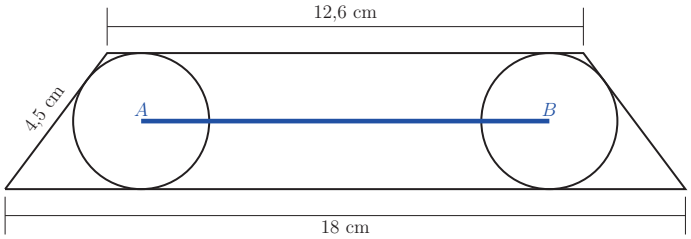


Parte B

5. Um certo time de futebol entra em campo com os jogadores usando camisas numeradas sequencialmente entre 1 e 11. Um jogador é expulso durante a partida, de forma que a média aritimética dos números das camisas dos jogadores restantes é aumentada em $\frac{3}{10}$. Qual o número do jogador que foi expulso?

6. No castelo da bruxa Elvira Hyvolta existem 2 tipos de poções, as de gigantismo e as de nanicolina. Tomando as de gigantismo, os seres deste reino encantado aumentam em 700% de tamanho, e com as de nanicolina, eles diminuem em 75% seu tamanho. Cada ser só toma uma poção por dia. Desse modo, é possível que um sapo retorne a seu tamanho original, após tomar uma certa combinação das poções de Elvira?

7. Considere um trapézio isósceles e duas circunferências como ilustrado na figura abaixo. Encontre o comprimento do segmento AB que liga os centros das circunferências.



8. Encontre todos os números inteiros $n \geq 2$ tais que $n^3 + n^2 + n - 3$ é um número primo.