OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 3 (1° e 2° anos do ensino médio)

1. Encontre três números primos distintos dois a dois tais que sua soma e a soma dos seus quadrados são números primos também.

2. No castelo da bruxa Elvira Hyvolta existem 2 tipos de poções, as de gigantismo e as de nanicolina. Tomando as de gigantismo, os seres deste reino encantado aumentam em 700% de tamanho, e com as de nanicolina, eles diminuem em 75% seu tamanho. Cada ser toma exatamente uma poção por dia. Desse modo, é possível que um sapo que acabou de chegar, após tomar uma certa combinação das poções de Elvira, retorne a seu tamanho original?

3. Sejam A, B e C pontos numa reta com B entre A e C, de modo que $\overline{BC} < \overline{AB}$. Constrói-se os quadrados $ABDE$ e $BCFG$ do mesmo lado da reta.

   (a) Calcule a razão $\frac{EF}{AG}$.

   (b) Calcule a soma de ângulos $B\hat{A}G + G\hat{F}E$.

   (c) Prove que as retas AG, EF e DC concorrem em um único ponto.

4. Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com 0 e 1 de modo que a soma em cada linha e cada coluna seja a mesma. Calcule a_2, a_3, a_4 e a_5.

5. Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número x está na tela da calculadora e apertamos seu único botão, o número x é substituído pelo número $\frac{2x}{x^2+1}$. Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora qual número aparecerá após apertamos 2013 vezes seu botão.

6. Dois números a e b são ditos parceiros se a e b possuem os mesmo fatores primos. Por exemplo, 15 e 375 são parceiros, mas 35 e 70 não são. Provar que existem infinitos pares de inteiros positivos distintos m e n tais que as duas condições a seguir são satisfeitas:

   (i) m e n são parceiros

   (ii) $m + 1$ e $n + 1$ são parceiros