Gabarito OMERJ Nível 4

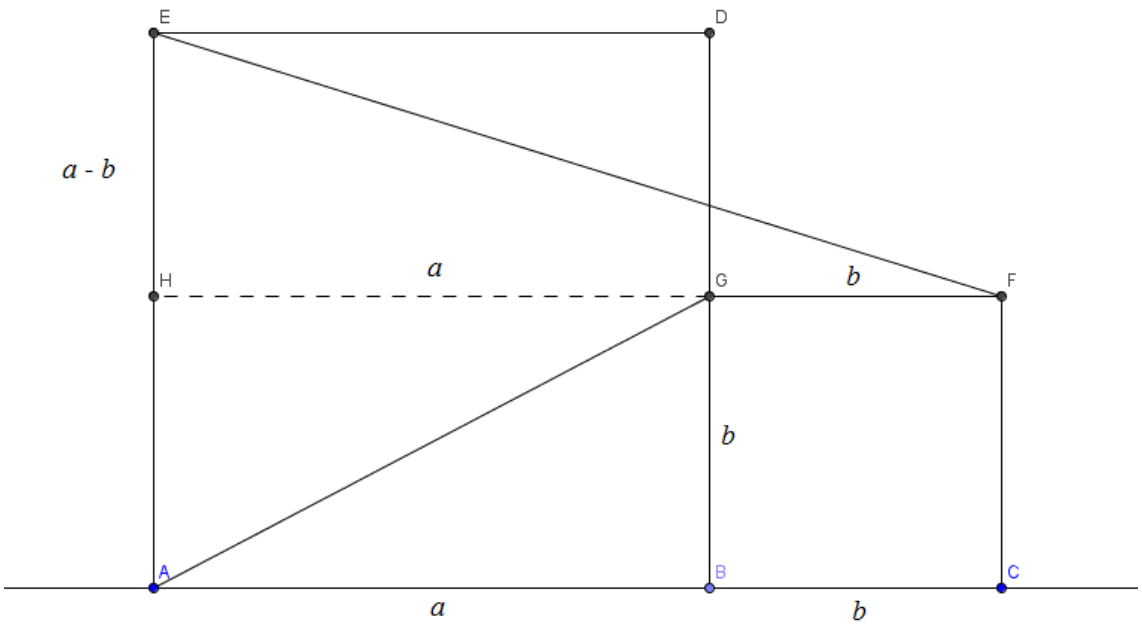
1) A soma de todos os elementos no n-ésimo diamante é

$$1\cdot 1+2\cdot 2+\ldots+n\cdot n+(n+1)(n-1)+(n+2)(n-2)+\ldots+(n+n-1)(n-(n-1))=$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+n^2-1^2+n^2-2^2+\ldots+n^2-(n-1)^2=n\cdot n^2=n^3.$$

2)

a)



Seja H o pé da perpendicular desde G até o lado AE. Além disso, sejam $a>b$ os lados dos quadrados. Veja na figura acima que pelo teorema de Pitágoras,

$EF=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$, e que $AG=\sqrt{a^2+b^2}$. Logo, a razão pedida é

$$\frac{EF}{AG}=\sqrt{2}.$$

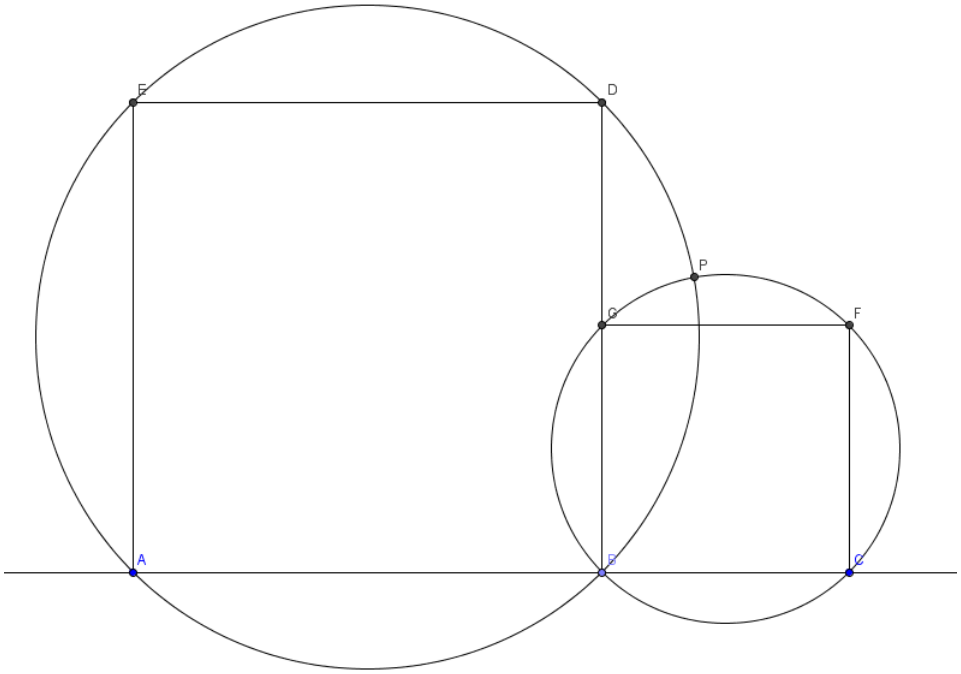
b) Veja que $\tan(BAG)=\dfrac{b}{a}$ e que $\tan(GFE)=\dfrac{a-b}{a+b}$. Então,

$$\tan(BAG+GFE)=\frac{\dfrac{b}{a}+\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{b(a-b)}{a(a+b)}}=\frac{b^2+a^2}{a^2+b^2}=1.$$ Como os ângulos são agudos, segue que

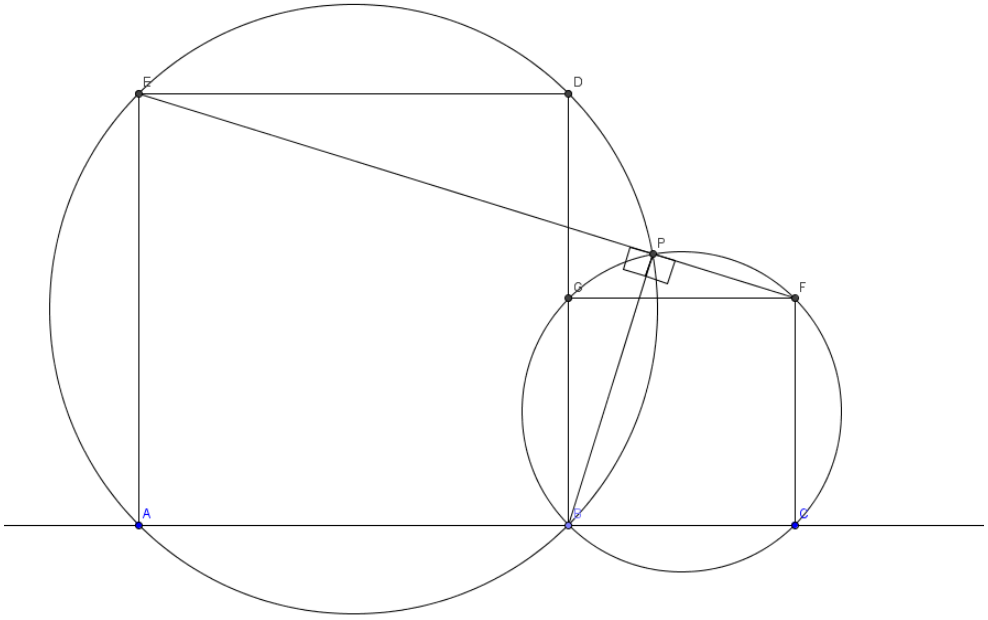
$$BAG+GFE=45°.$$

Obs: usamos a fórmula $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

c) <u>Solução 1</u>:

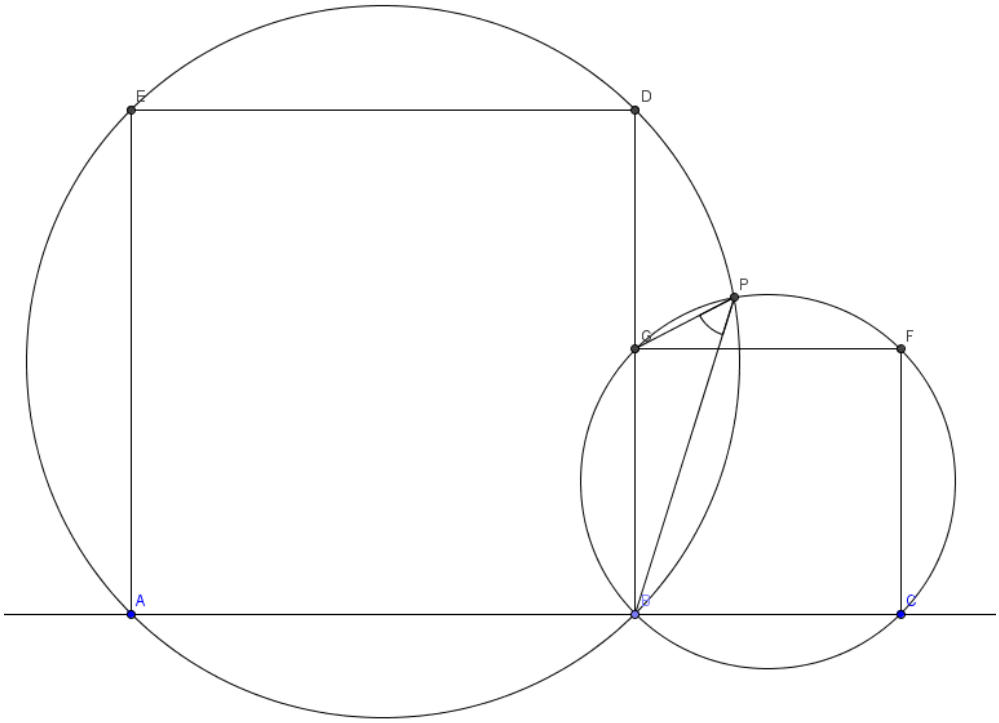


Seja *P* a interseção entre as circunferências circunscritas aos quadrados *ABDE* e *BCFG*. Provaremos que o ponto *P* é o ponto de concorrência das retas *AG*, *EF* e *DC*.



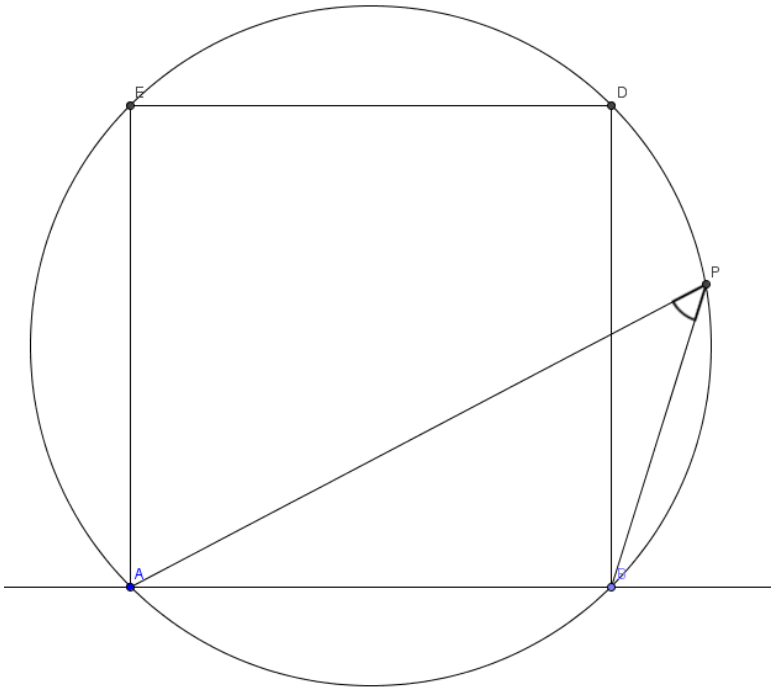
Como *BE* e *BF* são diâmetros, segue que $EPB = 90°$ e que $BPF = 90°$. Assim, o ponto *P* está na reta *EF*. Analogamente, *P* está na reta *DC*.

Para finalizar, basta mostrarmos que *P* também está na reta *AG*. Para isso, veja a figura a seguir:



Temos que $GPB = \dfrac{BG}{2} = 45°$.

Agora, considere a seguinte figura:



Veja que $APB = \dfrac{AB}{2} = 45°$.

Assim, segue que A, G, P são colineares, como queríamos.

<u>Solução 2</u>:

Seja P a interseção de AG com EF. Utilizaremos o teorema de Menelaus no triângulo ABG. Para isso, precisamos das razões $\frac{DG}{DB}, \frac{CB}{CA}, \frac{PA}{PG}$.

(i) $\frac{CB}{CA} = \frac{b}{a+b}$

(ii) $\frac{DG}{DB} = \frac{a-b}{a}$

(iii) Pelo item b, temos que $F\hat{P}G = 135°$. Usando a lei dos senos no triângulo PGF, temos $\frac{PG}{\text{sen}\left(P\hat{F}G\right)} = \frac{b}{\sqrt{2}/2}$. Usando a figura do item a, temos $\text{sen}\left(P\hat{F}G\right) = \frac{a-b}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$. Logo, $PG = \frac{(a-b)b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Daí, $PA = PG + AG = \frac{(a-b)b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \sqrt{a^2+b^2}$, ou seja, $PA = \frac{(a+b)a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Portanto, $\frac{PA}{PG} = \frac{a(a+b)}{b(a-b)}$.

Com isso, temos que $\frac{DG}{DB} \cdot \frac{CB}{CA} \cdot \frac{PA}{PG} = 1$ e pela recíproca do teorema de Menelaus aplicado ao triângulo AGB, segue que D, P e C são colineares.

<u>Solução 3:</u>

Usaremos geometria analítica:

Colocaremos as coordenadas como:
$A = (0,0), B = (a,0), C = (a+b,0), D = (a,a), E = (0,a), F = (a+b,b), G = (a,b)$.

As equações das retas são:

$$CD: y = \frac{-a}{b}(x-a-b)$$

$$EF: y = -\left(\frac{a-b}{a+b}\right)x + a$$

A interseção dessas duas retas é o ponto $\left(\frac{a^2(a+b)}{a^2+b^2}, \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}\right)$. Veja que esse ponto pertence à reta AG, de equação $y = \frac{b}{a}x$.

3) a) Os tabuleiros 2 x 2 são: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Logo, $a_2 = 4$.

b) Para os tabuleiros 3 x 3, dividiremos em casos de acordo com as quantidades de 1's por linha:

Caso 1: Não há 1's:

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ - 1 tabuleiro

Caso 2: Um 1:

Basta permutar as colunas de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, o que pode ser feito de $3! = 6$ maneiras.

Caso 3: Dois 1's:

Fazendo uma troca $0 \leftrightarrow 1$, caímos no caso 2, em um total de 6 tabuleiros.

Caso 4: Três 1's:

Fazendo uma troca $0 \leftrightarrow 1$, caímos no caso 1, em um total de 1 tabuleiro.

Logo, $a_3 = 1 + 6 + 6 + 1 = 14$.

c) Faremos uma contagem semelhante aos tabuleiros 3x3:

Caso 1: Não há 1's:

1 tabuleiro

Caso 2: Um 1:

$4! = 24$ tabuleiros (análogo ao caso 2 do tabuleiro 3x3)

Caso 3: Dois 1's:

Há $\binom{4}{2} = 6$ de se colocar os 1's na primeira linha. (*)

Sem perda de generalidade, suporemos que a primeira linha é $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Na primeira coluna, deve haver mais um 1, o que pode ser feito de 3 maneiras (**). Sem perde de generalidade, suporemos que o tabuleiro é da forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$.

O primeiro tipo está claramente determinado e deve ser $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Os outros dois aparecem em iguais quantidades e, então, podemos considerar apenas o primeiro deles.

Na segunda coluna, deve haver mais um 1, o que pode ser feito de 2 maneiras, o que nos dá os tabuleiros:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Portanto, há 5 tabuleiros após (**). Assim, no caso 3, há $\binom{4}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 90$ tabuleiros.

O caso 4 é a mesma quantidade do caso 2 e o caso 5 é a mesma quantidade do caso 1.

Logo, $a_4 = 1 + 24 + 90 + 24 + 1 = 140$.

d) É fácil ver que para 0, 1, 4, 5 1's por linha, assim como nos casos anterios, as quantidades de tabuleiros são, respectivamente, $1, 5!, 5!, 1$. Além disso, os casos com 2 e 3 1's por linha, as quantidades são as mesmas. Faremos então o caso com 2 1's por linha:

Assim como anteriormente, temos $\binom{5}{2}$ opções para a 1ª linha (*). Sem perdas, podemos considerar a linha $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Deve haver outro 1 na 1ª coluna e seu lugar pode ser escolhido de 4 maneiras (**). Então, podemos começar com o tabuleiro

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$. Se o elemento da 2ª linha e 2ª coluna for 1, temos o tabuleiro

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$. Agora, para finalizar, precisamos preencher um tabuleiro 3x3 colocando dois 1's por linha e coluna. Isso já foi feito no cálculo do a_3 e pode ser feito de 3! = 6 maneiras.

Se o elemento da 2ª linha e 2ª coluna for 0, o 1 da 2ª linha pode ser colocado em 3 posições. Sem perdas, coloquemos o 1 na coluna 3: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}$. Precisamos ter um 1 na 2ª coluna, que pode ser colocado em 3 posições. Sem perdas, consideremos o tabuleiro $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix}$. Aqui, temos 2 situações.

(i) o elemento da 3ª linha e 3ª coluna é 1: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (só há uma opção)

(ii) o elemento da 3ª linha e 3ª coluna é 0. Daí, há duas opções para o outro 1 da 3ª linha e 2 opções para o outro 1 da 3ª coluna. Sem perdas, colocando esses 1's na 4ª coluna e na 4ª linha respectivamente, temos o tabuleiro $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Juntando tudo, neste caso, temos $\binom{5}{2}\cdot 4\cdot\left(3!+3\cdot 3\cdot\left(1+2\cdot 2\right)\right)=2040$ tabuleiros.

Então, $a_5=1+120+2040+2040+120+1$, ou seja, $a_5=4322$.

4) Solução 1:

Veja que $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{\left(1+x\right)^2-\left(1-x\right)^2}{\left(1+x\right)^2+\left(1-x\right)^2}$. Daí,

$f\left(f\left(x\right)\right)=\dfrac{\left(1+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2-\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}{\left(1+\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2+\left(1-\dfrac{2x}{x^2+1}\right)^2}=\dfrac{\left(1+x\right)^4-\left(1-x\right)^4}{\left(1+x\right)^4+\left(1-x\right)^4}$. Assim, por indução, segue que $\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{2013\text{ vezes}}\left(x\right)=\dfrac{\left(1+x\right)^{2^{2013}}-\left(1-x\right)^{2^{2013}}}{\left(1+x\right)^{2^{2013}}+\left(1+x\right)^{2^{2013}}}$. Então, para $x=2$, o resultado será $\dfrac{3^{2^{2013}}-1}{3^{2^{2013}}+1}$.

Solução 2:

Veja que após apertar a calculadora 1 vez, o número será $\dfrac{4}{5}$, após apertar a calculadora 2 vezes, o número será $\dfrac{40}{41}$.

Provaremos então que após apertar a tecla para um número da forma $\dfrac{n}{n+1}$, o número resultante também será desta forma. De fato, o número será $\dfrac{\dfrac{2n}{n+1}}{1+\dfrac{n^2}{\left(n+1\right)^2}}=\dfrac{2n\left(n+1\right)}{2n\left(n+1\right)+1}$.

Assim, sendo $\dfrac{x_n}{x_n+1}$ o número que aparece na calculadora após apertarmos *n* vezes o botão, teremos que $x_{n+1}=2x_n\left(x_n+1\right)\Rightarrow 2x_{n+1}+1=\left(2x_n+1\right)^2$. Sendo $x_1=4$, teremos que $2x_n+1=9^{2^{2^{n-1}}}\Rightarrow x_n=\dfrac{3^{2^n}-1}{2}$. Logo, o número obtido por Luca será $\dfrac{3^{2^{2013}}-1}{3^{2^{2013}}+1}$.

5) <u>Afirmação:</u> Os números não sinistros são os da forma $3k$, onde *k* é inteiro não divisível por 3.

A demonstração consiste em quatro partes:

1) Todo número múltiplo de 9 é sinistro:

De fato, se $n = 9k$, tome $a = k-1, b = k$ e $c = k+1$.

2) Todo número $n \equiv 1$ (mod 3) é sinistro:

De fato, se $n = 3k+1$, tome $a = b = k$ e $c = k+1$.

3) Todo número $n \equiv 2$ (mod 3) é sinistro:

De fato, se $n = 3k+2$, tome $a = b = k+1$ e $c = k$.

4) Se um inteiro múltiplo de 3 é sinistro, então ele é múltiplo de 9:

Seja então $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ um número múltiplo de 3. Então, $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 0 \pmod 3$. Pelo Pequeno Teorema de Fermat, $a + b + c \equiv 0 \pmod 3$. Provaremos então que $E = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \equiv 0 \pmod 3$, o que mostrará que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)$ é de fato múltiplo de 9.

Se dentre *a, b, c,* existem dois, digamos sem perdas *a* e *b,* tais que $a \equiv b \pmod 3$, então $c \equiv -2a \pmod 3$ e aí $E \equiv (a+2a)^2 + (-2a-a)^2 \equiv 0 \pmod 3$. Então, podemos supor que *a, b, c* são incongruentes entre si módulo 3. Em particular, existe um entre eles, digamos sem perdas *a*, tal que $a \equiv 0 \pmod 3$. Isso nos dá que $c \equiv -b \pmod 3$ e daí $E \equiv b^2 + (2b)^2 + (-b)^2 \equiv 0 \pmod 3$, como queríamos.

Isso conclui a prova.

Assim, o número de inteiros sinistros de 1 a 2013 é

$$2013 - \left(\frac{2013}{3} - \left\lfloor \frac{2013}{9} \right\rfloor\right) = 2013 - (671 - 223) = 1565.$$

6) Fazendo $x \to x + f(y)$, temos que $f(x + f(y)) = f(x) + f(y)$ (*) . Assim, a imagem de f é fechada com relação à soma e à diferença.

Veja que $f \equiv 0$ é uma solução. Suporemos então que este não é o caso e, portanto, existe um elemento não nulo na imagem de f. Seja então $k = f(d)$ o elemento não nulo de menor módulo em $\operatorname{Im} f$.

<u>Afirmação:</u> Todos os elementos em $\operatorname{Im} f$ são múltiplos de k.

<u>Prova:</u> Seja $a \in \operatorname{Im} f$. Escrevendo $a = qk + r$, $0 \le r < |k|$. Como $\operatorname{Im} f$ é fechada com relação à soma e à diferença, temos que $a - qk = r \in \operatorname{Im} f$. Como *k* é o elemento não

nulo de menor módulo em $\operatorname{Im} f$, teremos contradição se $r \neq 0$. Logo, $r = 0$ e, portanto, segue que a é múltiplo de k .

Fazendo agora $y = d$ em (*), obtemos $f(x+k) = f(x)+k$ (**) e da mesma forma fazendo $y = d$ na relação dada no enunciado, chegamos a $f(x-k) = f(x)-k$. Assim, basta definirmos $f(0), f(1),\ldots, f(k-1)$ para determinarmos a função completamente.

Pela afirmação, podemos escrever $f(0) = a_0 k$, $f(1) = a_1 k$, …, $f(k-1) = a_{k-1} k$, onde $a_0, a_1,\ldots, a_{k-1}$ são inteiros quaisquer. Assim, se $n = mk + r$, com $0 \leq r \leq k-1$, fazendo $x = r, r+k, r+2k,\ldots, r+(m-1)k$ em (**), segue que:

$$f(r+k) = f(r)+k$$

$$f(r+2k) = f(r+k)+k$$

$$f(r+3k) = f(r+2k)+k$$

...

$$f(r+mk) = f(r+(m-1)k)+k$$

Somando tudo, temos que $f(n) = f(r+mk) = f(r)+mk = a_r k + mk$.

Assim, as funções pedidas são da forma:

i) $f(x) \equiv 0$

ii) Sejam k um inteiro não nulo e $a_0, a_1,\ldots, a_{k-1}$ inteiros quaisquer . Definamos a função como:

Se $n = mk + r$, $f(n) = a_r k + mk$. É fácil ver que toda função deste tipo funciona.