OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO - 2013

31 de agosto de 2013

Nível 4 (3° ano do ensino médio)

1. Dado um número n natural, fazemos uma diamante com os números 1, 2, ..., $2n-1$ do seguinte modo, na primeira linha aparece um número 1, na segunda aparecem dois números 2, e assim por diante até que na n-ésima linha aparecem n números n, já na $n+1$-ésima linha aparecem $n-1$ números $n+1$, até que na $2n-1$-ésima linha aparece um número $2n-1$. Abaixo temos exemplos de diamantes para $n = 1, 2, 3, 4$.

$$\left|\begin{array}{c} 1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 2 & & 2 \\ & 3 & \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 3 & & 3 & & 3 \\ & 4 & & 4 & \\ & & 5 & & \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \\ & 5 & & 5 & & 5 & \\ & & 6 & & 6 & & \\ & & & 7 & & & \end{array}\right|$$

   Qual a soma de todos os elementos no n-ésimo diamante?

2. Sejam A, B e C pontos numa reta com B entre A e C, de modo que $\overline{BC} < \overline{AB}$. Constrói-se os quadrados $ABDE$ e $BCFG$ do mesmo lado da reta.

   (a) Calcule a razão $\frac{EF}{AG}$.

   (b) Calcule a soma de ângulos $B\hat{A}G + G\hat{F}E$.

   (c) Prove que as retas AG, EF e DC concorrem em um único ponto.

3. Seja a_n o número de maneiras de preencher um tabuleiro $n \times n$ com 0 e 1 de modo que a soma em cada linha e cada coluna seja a mesma. Calcule a_2, a_3, a_4 e a_5.

4. Luca tem uma calculadora com um único botão. Se um número x está na tela da calculadora e apertamos seu único botão, o número x é substituído pelo número $\frac{2x}{x^2+1}$. Dado que, inicialmente, o número 2 está na tela da calculadora qual número aparecerá após apertamos 2013 vezes seu botão.

5. Um inteiro é dito sinistro se pode ser escrito na forma $x^3+y^3+z^3-3xyz$, com x, y, z inteiros. Determine a quantidade de números sinistro existentes de 1 a 2013.

6. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) - f(y)$$

   para todos números inteiros x e y.