

OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

PARTE OBJETIVA (10 pontos por questão)

QUESTÃO 1

Ao substituímos o símbolo \square pelos sinais de adição, de subtração ou de multiplicação (+, - ou x) na expressão $2004 \square 2005 \square 2006 \square 2007$, quantos inteiros positivos obtemos?

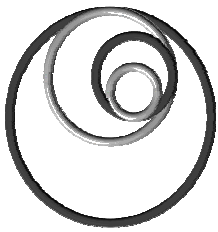
SOLUÇÃO:

As 27 possibilidades de combinações são:

2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	8022
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4007
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4030051
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4010
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4026041
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4022027
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	8072216214
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4012
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4026041
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	0
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4022033
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4018019
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	8044062
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4018021
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	negativo
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	8060150127
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	806014113
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	4014007
2004	\square	2005	\square	2006	\square	2007	=	positivo

São 16.

Não pode-se contar um repetido duas vezes, já que a pergunta foi “quantos inteiros positivos obtemos?”.



OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 2

Manoel escreveu os números naturais de 1 até 2007. Em seguida, sublinhou todos os números divisíveis por 3, depois sublinhou todos os números divisíveis por 5 e, por fim, sublinhou todos os números divisíveis por 6. Quantos números foram sublinhados apenas duas vezes?

SOLUÇÃO:

- ✓ Os números múltiplos comuns de 3 e 5 (Múltiplos de 15) são 133 (2007:15).
- ✓ Os números múltiplos comuns de 3 e 6
(Múltiplos de 6) são 334 (2007: 6).
- ✓ Os números múltiplos comuns de 5 e 6 são também múltiplos comuns de 3, 5 e 6, já que são múltiplos de 30. São ao todo 66 (2007:30).

Temos então, números sublinhados apenas duas vezes: $(133-66) + (334-66)$ que dá **335 números**.

QUESTÃO 3

Qual a forma simplificada do produto:

$$3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2006}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2007}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2008}\right)$$

SOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \dots \left(\frac{2005}{2006}\right) \cdot \left(\frac{2006}{2007}\right) \cdot \left(\frac{2007}{2008}\right) \\ & 3 \cdot \left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\right) \dots \left(\frac{\cancel{2005}}{\cancel{2006}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{2006}}{\cancel{2007}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{2007}}{2008}\right) \\ & 3 \cdot \left(\frac{1}{2008}\right) = \frac{3}{2008} \end{aligned}$$

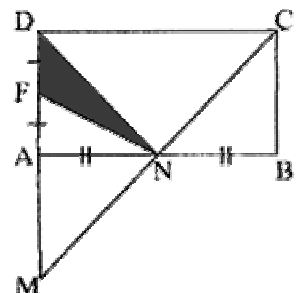
QUESTÃO 4

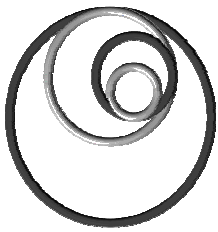
ABCD é um retângulo. N é o ponto médio de \overline{AB} e F é o ponto médio de \overline{DA} . Sendo M a projeção de DA sobre CN, Determine a razão entre a área do $\triangle FND$ e a área do Pentágono DMNBC.

SOLUÇÃO:

A razão entre a área do triângulo $\triangle FND$ e a área do Pentágono DMNBC :

$$\frac{\text{FND}}{\text{DMNBC}} = \frac{1}{10}$$





OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

PARTE DISCURSIVA (20 pontos por questão)

QUESTÃO 5

Num determinado momento na final de futsal dos jogos escolares da Cidade de Tribobó do Norte, Fabinho percebeu que o número de meninos presentes no Ginásio era três vês mais que o número de meninas. Após a chegada de um ônibus com 72 meninas e 88 meninos, a porcentagem de meninas no Ginásio passou a ser 30%. Quantos meninos e quantas meninas passaram a estar no ginásio após da chegada desse ônibus?

SOLUÇÃO:

1º Momento	2º Momento
$x \begin{cases} 25\% \text{ meninas} \\ 75\% \text{ meninos} \end{cases}$	$x + 16 \begin{cases} 30\% \text{ meninas} \\ 70\% \text{ meninos} \end{cases}$

$$25\% x + 72 = 30\% (x + 160)$$

$$\frac{25x}{100} + 72 = \frac{30}{100} (x + 160)$$

$$\frac{25x}{100} + 72 = \frac{30x}{100} + \frac{30 \cdot 160}{100}$$

$$\frac{25x}{100} + \frac{7200}{100} = \frac{30x}{100} + \frac{4800}{100}$$

$$25x + 7200 = 30x + 4800$$

$$5x = 2400$$

$$x = 480$$

Estavam no ginásio após a chegada do ônibus 30% de 640 = **192 meninas** e 70% de 640 = **448 meninos**.

QUESTÃO 6

Considere os lados de dois quadrados medindo **p** e **q**. E as seguintes informações:

- ✓ A soma das áreas desses dois quadrados é de $15,3\text{m}^2$;
- ✓ O produto das suas diagonais é $13,86\text{m}$.

Determine o valor de S, sendo $S = p + q$.

SOLUÇÃO:

$\begin{cases} p^2 + q^2 = 15,3\text{m}^2 \\ p\sqrt{2} \cdot q\sqrt{2} = 13,86\text{m} \end{cases}$	\Rightarrow	$\begin{cases} p^2 + q^2 = 15,3\text{m}^2 \\ 2pq = 13,86\text{m} \end{cases}$
---	---------------	---

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

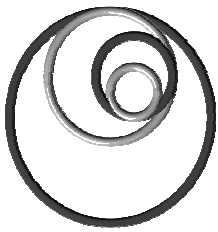
$$(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

$$(p + q)^2 = 15,3 + 13,86$$

$$(p + q)^2 = 29,16$$

$$p + q = \sqrt{29,16}$$

$$p + q = 5,4 \text{ m}$$



OLIMPIÁDA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)

QUESTÃO 7

Num folheto de propaganda, uma montadora explica que um veículo equipado com a tecnologia flex fuel, bicomcombustível, pode usar álcool, gasolina, ou uma mistura de álcool e gasolina em qualquer proporção. Testes realizados com cinco proporções apresentaram os seguintes desempenhos:

Proporção de combustível		Consumo (km por litro)
Álcool	Gasolina	
-----	100%	14
40%	60%	13
50%	50%	12
70%	30%	10
100%	-----	7

Considere que o preço do litro de álcool é R\$ 1,80 e o preço do litro de gasolina é R\$ 2,50.

Numa viagem de 546 km com esse veículo:

a) Quantos reais seriam economizados, se o carro fosse abastecido somente com álcool do que fosse abastecido somente com gasolina?

SOLUÇÃO:

$$(546 \text{ Km} : 7) = 78 \text{ litros de álcool}$$

$$(546 \text{ Km} : 14) = 39 \text{ litros de gasolina}$$

$$\text{Álcool} : 78 \times 1,80 = 140,40$$

$$\text{Gasolina} : 39 \times 2,50 = 97,50$$

A diferença é de $(140,40 - 97,50)$: R\$ 42,90

Não há uma economia e sim um prejuízo caso o carro fosse abastecido apenas por álcool do que apenas por gasolina.

b) Qual das cinco proporções apresentadas possibilita o menor gasto com combustível?

SOLUÇÃO:

Trabalhando as 5 possibilidades:

- Somente álcool: R\$ 140,40
- Somente gasolina: R\$ 97,50
- 40% de álcool e 60% de gasolina:

$$546 : 13 = 42 \text{ litros} \begin{cases} 40\% = 16,8 \text{ litros} = \text{R\$ } 30,24 \\ 60\% = 25,2 \text{ litros} = \text{R\$ } 63,00 \end{cases} \Rightarrow \text{R\$ } 93,24$$

- 50% de álcool e 50% de gasolina:

$$546 : 12 = 45,5 \text{ litros} \begin{cases} 50\% = 22,75 \text{ litros} = \text{R\$ } 40,95 \\ 50\% = 22,75 \text{ litros} = \text{R\$ } 56,875 \end{cases} \Rightarrow \text{R\$ } 97,825$$

Nível 2 – (7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental)