

# OLIMPIÁDAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

**Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)**

**PROVA DISCURSIVA (20 pontos por questão)**

---

## QUESTÃO 1

Seja  $A$  um conjunto de 2007 números inteiros positivos consecutivos, cujo menor elemento é  $a$ . Determine o menor valor de  $a$  para o qual a soma dos elementos de  $A$  é um quadrado perfeito par.

### SOLUÇÃO:

Temos  $A = \{a, a+1, a+2, \dots, a+2006\}$ .

A soma dos elementos de  $A$  é  $S = \frac{(a + a + 2006) \cdot 2007}{2} = (a + 1003) \cdot 2007$ .

Como  $2007 = 3^2 \cdot 223$ , devemos ter  $(a+1003) \cdot 223$  quadrado perfeito par.

Logo, precisamos ter  $a+1003 = (2k)^2 \cdot 223$ , com  $k$  natural.

Como  $a = (2k)^2 \cdot 223 - 1003$ , o menor valor de  $k$  que faz  $a$  ser positivo é  $k = 2$ , o que dá  $a = 2565$ .

---

## QUESTÃO 2

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos no espaço tais que os ângulos  $\widehat{BAD}, \widehat{BCD}, \widehat{ADC}, \widehat{ABC}$  são retos. Prove que  $A, B, C$  e  $D$  são coplanares.

### SOLUÇÃO:

Usando o teorema de Pitágoras, temos que

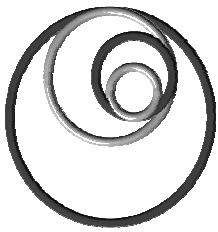
$$\begin{cases} BD^2 = BC^2 + CD^2 \\ BD^2 = AB^2 + AD^2 \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \\ AC^2 = AD^2 + CD^2 \end{cases}.$$

Daí segue que  $2AC^2 = 2BD^2 \Rightarrow AC = BD$ . Substituindo, segue que  $AD = BC$ .

Com isso, temos que os triângulos  $ACD, BCD, ABD$  e  $ABC$  são congruentes.

Sendo  $\theta = \widehat{CAD}$ , pela congruência, temos que  $\widehat{BAC} = 90^\circ - \theta$ .

Daí, segue que  $\widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 90^\circ = \widehat{BAD}$ , portanto,  $A, B, C$  e  $D$  são coplanares.



# OLIMPIÁDAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

**Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)**

## QUESTÃO 3

Considere os  $n$  vértices de um polígono regular sobre uma circunferência. Escolhendo-se 3 vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  (distintos) deste polígono aleatoriamente, a probabilidade de o triângulo  $ABC$  ser obtusângulo é  $P$ . Determine os valores de  $n$  para os quais  $P = \frac{1}{2}$ .

## SOLUÇÃO:

Seja  $ABC$  uma possível escolha de um triângulo (de modo que  $A, B, C$  esteja no sentido horário). Fixe de uma vez por todas o vértice  $A$  do triângulo.

Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  o número de vértices do polígono que estão entre  $A$  e  $B$ ,  $B$  e  $C$ ,  $C$  e  $A$  respectivamente.

Então:

$$(I) \ a + b + c = n - 3 \text{ e } a, b, c \geq 0$$

Agora separamos em dois casos:

### 1º caso: $n$ par

Seja  $n = 2k$ . Então, para que possua um ângulo obtuso,  $a$ ,  $b$  ou  $c$  deve ser maior ou igual que  $k$ .

Agora basta contar quantas soluções possui a equação (I) e quantas destas satisfazem a condição acima.

O número de soluções de (I) é sabido e igual a  $\binom{n-1}{2}$ .

Agora, para termos a condição que  $a \geq k$  escrevemos  $a = k + a'$  e agora temos que calcular o número de soluções de  $a + b + c = k - 3$  que é  $\binom{k-1}{2}$ .

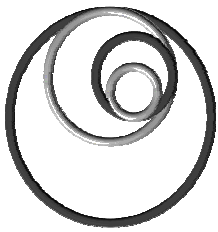
Podíamos ter escolhido  $b$  ou  $c$ , logo devemos multiplicar por 3. (Veja, também, que não é possível duas variáveis serem maiores ou iguais a  $k$ ).

$$\text{Daí } P = \frac{3 \binom{k-1}{2}}{\binom{n-1}{2}} = \frac{3(k-1)(k-2)}{(2k-1)(2k-2)} = \frac{3(k-2)}{2(2k-1)} \text{ para q seja igual a } \frac{1}{2} \text{ precisamos } k = 5$$

logo  $n = 10$ .

### 2º caso: $n$ ímpar

Seja  $n = 2k + 1$  pelos mesmos argumentos anteriores temos que a probabilidade é:



# OLIMPIÁDAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

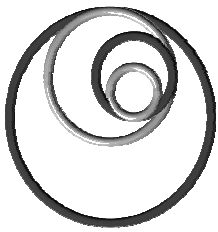
06 de outubro de 2007.

**Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)**

$$P = \frac{3 \binom{k}{2}}{\binom{n-1}{2}} = \frac{3k(k-1)}{2k(2k-1)} = \frac{3(k-1)}{2(2k-1)}$$

para que seja igual a  $\frac{1}{2}$  precisamos ter  $k = 2$ , logo

$$n = 5.$$



# OLIMPIÁDAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

**Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)**

## QUESTÃO 4

Considere uma elipse  $\varepsilon$  de focos  $F$  e  $F'$  e um ponto  $M$  sobre  $\varepsilon$ . Determine o lugar geométrico do centro do círculo ex-inscrito no triângulo  $MFF'$  em relação ao lado  $MF$  quando  $M$  varia sobre  $\varepsilon$ .

### SOLUÇÃO:

Sejam  $2a$  e  $2c$  o eixo maior e a distância focal da elipse, respectivamente. Seja  $AA'$  o eixo maior da elipse ( $AF < AF'$ ).

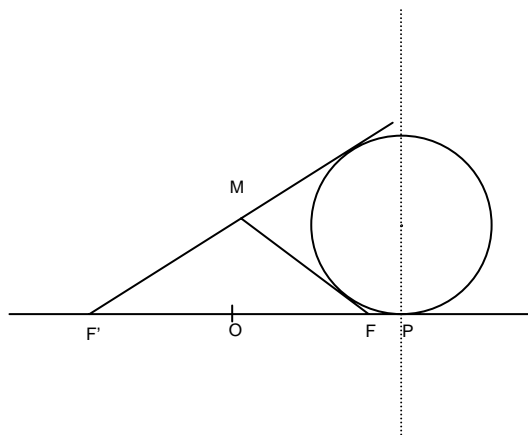
Como  $MF + MF' = 2a$ , temos que o perímetro do triângulo  $MFF'$  é  $2a + 2c$ .

É sabido que a distância  $F'P$  é igual ao semi-perímetro do triângulo  $MFF'$ , portanto,  $F'P = a + c$ .

Sendo  $O$  o centro da elipse, segue que  $OP = a$ . Portanto, temos  $P = A$ .

Então, podemos afirmar que o centro da circunferência está na perpendicular ao eixo maior da elipse passando por  $A$ .

Reciprocamente, é fácil ver que qualquer ponto desta reta, exceto  $A$ , está no lugar geométrico pedido (o ponto  $A$  deve ser excluído, pois não existe triângulo quando  $M$  está na reta  $FF'$ ).



## QUESTÃO 5

Determine todos os inteiros positivos  $a, b, c$  tais que  $(ab + bc + ca - 1)^2 \geq (a^2 + 1) \cdot (b^2 + 1) \cdot (c^2 + 1)$ .

### SOLUÇÃO:

$(ab + bc + ca - 1)^2 \geq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$  vale se e somente se

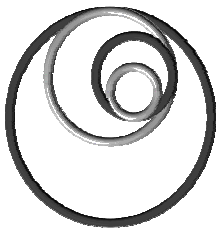
$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + 2abc^2 + 2acb^2 + 2cba^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 1 \geq$$

$$a^2b^2c^2 + (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 1 - (2abc^2 + 2acb^2 + 2cba^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$a^2b^2c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2abc(a + b + c) + 2ab + 2bc + 2ac \leq 0 \Leftrightarrow (abc - a - b - c)^2 \leq 0$$

o que acontece se e somente se  $abc - a - b - c = 0$ , logo:  $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = 1$ .



# OLIMPIADAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

## Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)

Agora, como  $a, b, c$  são inteiros, temos que ou todas as frações são iguais a  $\frac{1}{3}$  ou uma delas é  $\frac{1}{2}$  (pois se nenhuma é  $\frac{1}{2}$ , a soma é  $\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ , com igualdade se e somente se todas são  $\frac{1}{3}$ ).

Mas, se todas forem  $\frac{1}{3}$ , então,  $ab = bc = ac = 3$  o que obviamente não tem solução inteira. Logo podemos supor sem perda de generalidade que  $ab = 2$  portanto, ainda sem perda, podemos supor  $a = 1, b = 2$  o que implica  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{c} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2c} = \frac{1}{2}$  logo  $c = 3$ .

Portanto, as soluções são  $(1, 2, 3)$  e suas permutações.

---

### QUESTÃO 6

6) Para cada  $n$  natural, defina  $S(n)$  = soma dos dígitos de  $n$  (na base 10).

a) Existe  $M > 0$  constante tal que  $\frac{S(n)}{S(3n)} < M$ , para todo  $n$  natural?

#### SOLUÇÃO:

Considere o número  $n = \underbrace{33\dots3}_{m \text{ dígitos}} 4$ . Temos que  $3n = 1 \underbrace{00\dots0}_{m \text{ dígitos}} 2$ .

Logo,  $\frac{S(n)}{S(3n)} = \frac{3m+4}{3}$ , que é ilimitado.

Com efeito, tomando  $m = \lfloor M \rfloor$ , temos  $\frac{3m+4}{3} = \lfloor M \rfloor + \frac{4}{3} > M$ .

b) Dado  $k$  natural tal que  $\text{mdc}(k, 10) = 1$ , existe  $M > 0$  constante tal que  $\frac{S(n)}{S(kn)} < M$  para todo  $n$  natural?

#### SOLUÇÃO:

Como  $k$  é primo com 10 sabemos q existe  $d$  tal que  $10^d \equiv 1 \pmod{k}$  (basta tomar  $d = \varphi(k)$ , onde  $\varphi$  é a função fi de Euler) então tome o  $n = \frac{10^{md} + k - 1}{k}$  para  $m$  inteiro positivo.

Então  $n = \frac{10^{md} - 1}{k} + 1 = \frac{(10^d - 1)}{k} (10^{(m-1)d} + 10^{(m-2)d} + \dots + 1) + 1$  mas como  $\frac{(10^d - 1)}{k}$  tem

menos de  $d$  dígitos vemos que  $n$  é formado por  $m-1$  cópias de  $\frac{(10^d - 1)}{k}$  e termina com

$\frac{(10^d - 1)}{k} + 1$  (é fácil ver que  $\frac{(10^d - 1)}{k} + 1 < 10^d$ ).



# OLIMPIÁDAS DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

**Nível 4 – (3º ano do Ensino Médio)**

Logo  $S(n) = (m-1)S\left(\frac{(10^d-1)}{k}\right) + S\left(\frac{(10^d-1)}{k} + 1\right)$ , enquanto  $S(kn) = 1 + S(k-1)$

tomando  $m = \left\lfloor \frac{M(1 + S(k-1)) - S\left(\frac{(10^d-1)}{k} + 1\right)}{S\left(\frac{(10^d-1)}{k}\right)} \right\rfloor + 2$  vemos que  $\frac{S(n)}{S(kn)} > M$ .