OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 3 – (1º e 2º anos do Ensino Médio)

***PROVA DISCURSIVA** (20 pontos por questão)*

QUESTÃO 1

Seja A um conjunto de 2007 números inteiros positivos consecutivos, cujo menor elemento é ***a***. Determine o menor valor de ***a*** para o qual a soma dos elementos de A é um quadrado perfeito par.

SOLUÇÃO:

Temos $A=\{a, a+1, a+2, \ldots a+2006\}$.

A soma dos elementos de A é $S=\dfrac{(a+a+2006)\cdot 2007}{2}=(a+1003)\cdot 2007$.

Como $2007=3^2\cdot 223$, devemos ter $(a+1003)\cdot 223$ quadrado perfeito par. Logo, precisamos ter $a+1003=(2k)^2\cdot 223$, com *k* natural. Como $a=(2k)^2\cdot 223-1003$, o menor valor de *k* que faz *a* ser positivo é *k* = 2, o que dá *a* = 2565.

QUESTÃO 2

Dado que *x* e *y* são reais positivos tais que $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 33xy = 2662$, determine o valor numérico de S = x + y.

SOLUÇÃO:

Veja que $x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=S\cdot\left(S^2-3xy\right)$.

Substituindo no enunciado, temos que $S^3-3xyS+S^3+33xy=2662$, logo $2\left(S^3-11^3\right)-3xy(S-11)=0$. Podemos fatorar S - 11:

$$(S-11)\left(2S^2+22S+242-3xy\right)=0.$$

Como $2S^2+22S+242-3xy=2(x+y)^2+22S+242-3xy=2x^2+xy+2y^2+22S+242$ é soma de termos positivos, este fator não pode se anular, portanto, devemos ter *S* = 11.

QUESTÃO 3

Prove que $(ab + bc + ca - 1)^2 \le (a^2 + 1) . (b^2 + 1) . (c^2 + 1)$, para todos *a*, *b*, *c* reais.

SOLUÇÃO:

$(ab+bc+ca-1)^2 \le (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)$ vale se e somente se

$(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+2abc^2+2acb^2+2cba^2-2ab-2bc-2ac+1\le$

$a^2b^2c^2+(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2+a^2+b^2+c^2+1 \quad \Leftrightarrow$

$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2+1-(2abc^2+2acb^2+2cba^2-2ab-2bc-2ac+1)\ge 0 \quad \Leftrightarrow$

$a^2b^2c^2+a^2+b^2+c^2-2abc(a+b+c)+2ab+2bc+2ac\ge 0 \quad \Leftrightarrow$

$(abc-a-b-c)^2\ge 0$ o que é verdade

QUESTÃO 4

Considere os ***n*** vértices de um polígono regular sobre uma circunferência. Escolhendo-se 3 vértices *A*, *B* e *C* (distintos) deste polígono aleatoriamente, a probabilidade de o triângulo *ABC* ser obtusângulo é P. Determine os valores de ***n*** para os quais P = $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO:

Seja ABC uma possível escolha de um triângulo (de modo que A,B,C esteja no sentido horário). Fixe de uma vez por todas o vértice A do triângulo. Sejam *a*, *b*, *c* o número de vértices do polígono que estão entre A e B, B e C, C e A respectivamente.

Então:

(I) $a+b+c=n-3$ e $a,b,c\geq 0$

Agora separamos e dois casos:

1º caso: *n* par

Seja $n=2k$. Então, para que possua um ângulo obtuso, *a*, *b* ou *c* deve ser maior ou igual que k. Agora basta contar quantas soluções possui a equação (I) e quantas destas satisfazem a condição acima.

O número de soluções de (I) é sabido e igual a $\binom{n-1}{2}$. Agora, para termos a condição que $a\geq k$ escrevemos $a=k+a'$ e agora temos que calcular o numero de soluções de $a+b+c=k-3$ que é $\binom{k-1}{2}$. Podíamos ter escolhido *b* ou *c*, logo devemos multiplicar por 3. (Veja, também, que não é possível duas variáveis serem maiores ou iguais a *k*). Daí:

$$P=\frac{3\binom{k-1}{2}}{\binom{n-1}{2}}=\frac{3(k-1)(k-2)}{(2k-1)(2k-2)}=\frac{3(k-2)}{2(2k-1)}$$ para q seja igual a $\frac{1}{2}$ precisamos $k=5$ logo $n=10$.

2º caso: *n* ímpar

Seja $n=2k+1$ pelos mesmos argumentos anteriores temos que a probabilidade é:

$$P=\frac{3\binom{k}{2}}{\binom{n-1}{2}}=\frac{3k(k-1)}{2k(2k-1)}=\frac{3(k-1)}{2(2k-1)}$$ para que seja igual a $\frac{1}{2}$ precisamos ter $k=2$, logo $n=5$.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA
DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO – 2007

06 de outubro de 2007.

Nível 3 – (1º e 2º anos do Ensino Médio)

QUESTÃO 5

Num triângulo ABC, as medianas relativas aos vértices B e C são perpendiculares. Prove que a soma das cotangentes dos ângulos B e C do triângulo é maior ou igual a $\frac{2}{3}$.

SOLUÇÃO:

Sejam M e N os pontos médios dos lados AC e AB respectivamente. Seja G o baricentro do triângulo e $x = GM$, $y = GN$. Temos $BG = 2x, CG = 2y$.

Sejam u e v os ângulos $C\hat{B}M$ e $A\hat{B}M$.

Temos que $\tan B = \tan(u+v) = \dfrac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \cdot \tan v} = \dfrac{\frac{y}{x} + \frac{y}{2x}}{1 - \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{2x}} = \dfrac{3xy}{2x^2 - y^2}$.

Analogamente, temos $\tan B = \dfrac{3xy}{2y^2 - x^2}$.

Daí, $\cot B + \cot C = \dfrac{x^2 + y^2}{3xy} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$.

Como x e y são positivos, temos que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2$ (Vem de $(x-y)^2 \geq 0$).

Isso prova que $\cot B + \cot C \geq \dfrac{2}{3}$.

QUESTÃO 6

Para cada n natural, defina S (n) = soma dos dígitos de n (na base 10). Existe M > 0 constante tal que $\dfrac{S(n)}{S(3n)} < M$, para todo n natural?

SOLUÇÃO:

Considere o número $n = \underbrace{33...3}_{k \text{ dígitos}}4$.

Temos que $3n = 1\underbrace{00...0}_{k \text{ dígitos}}2$,.

Logo, $\dfrac{S(n)}{S(3n)} = \dfrac{3k+4}{3}$, que é ilimitado.

Com efeito, tomando $k = \lfloor M \rfloor$, temos $\dfrac{3k+4}{3} = \lfloor M \rfloor + \dfrac{4}{3} > M$.